WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

29. September 2011

4. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie mit der modularen Methode und mit höchstens zweistelligen Primzahlen den ggT in $\mathbb{Z}[x]$ der beiden Polynome
$f = 72x^5 + 12x^4 + 84x^3 - 72x^2 - 24x + 48$ und $g = 189x^4 + 252x^3 + 21x^2 + 210x + 168$!
Die ggT über endlichen Körpern können Sie durch ein Computeralgebrasystem bestimmen lassen. (Maple: `Gcd(f, g) mod p;` Maxima: `modulus : p;` schaltet die Arithmetik um auf Rechnen modulo p; danach `gcd(f, g);` Mit `modulus : false;` kommen Sie zurück zur gewöhnlichen Arithmetik.)

b) Für welche Primzahlen p hat $\mathrm{ggT}(f \bmod p, g \bmod p) \in \mathbb{F}_p[x]$ einen anderen Grad als $\mathrm{ggT}(f, g) \in \mathbb{Z}[x]$?

Aufgabe 2: *(3 Punkte)*

a) Der Maple-Befehl zur Berechnung des ggT zweier Polynome heißt `gcd(f, g)`, der zur Berechnung des Divisionsrests von f modulu g heißt `rem(f, g, x)`. Warum muß die Variable x beim `rem`-Befehl angegeben werden, nicht aber bei `gcd`?

b) Finden Sie zwei Polynome $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ der Grade zwei und drei, die in $\mathbb{Q}[x]$ teilerfremd sind, nicht aber in $\mathbb{Z}[x]$! Lassen Sie $\mathrm{ggT}(f, g)$ auch von Maple oder Maxima berechnen, und spekulieren Sie darüber, ob Maple hier der ggT in $\mathbb{Z}[x]$ oder der in $\mathbb{Q}[x]$ berechnet wurde!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Funktionswerte des Polynoms $f = x^4 - x^2 + 2x - 1$ für $x = -2, -1, 0, 1, 2$!

b) Faktorisieren Sie f nach dem Verfahren von KRONECKER! Die notwendigen Interpolationspolynome liefert Ihnen der Maple-Befehl `interp([x_1, ..., x_n], [y_1, ..., y_n], x)`, der ein Polynom g in x berechnet mit $g(x_i) = y_i$. Bei Maxima müssen Sie zunächst mit `load(interpol)$` die Interpolationsroutinen laden; danach funktioniert der Befehl `lagrange([[x_1, y_1], [x_2, y_2], ..., [x_n, y_n]]);`

c) Bestimme Sie die Nullstellen der biquadratischen Gleichung $x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$!

Aufgabe 4: *(7 Punkte)*

k sei ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Zeigen Sie:

a) Zu jedem $a \in k$ gibt es höchstens ein $x \in k$ mit $x^p = a$.

b) Falls $\mathrm{ggT}(n, p-1) = 1$ ist, hat die Gleichung $x^n = a$ stets eine Lösung $x \in k$.

c) Das Polynom $x^p - x \in k[x]$ hat p Nullstellen in k; diese bilden einen Teilkörper.

d) Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung $x^3 = 10$ im Körper $\mathbb{F}_{2011}$!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 6. Oktober 2011, um 15.30 Uhr