WOLFGANG K. SEILER A5, C201
Tel. 2515

22. September 2011

3. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie (mit Maple oder Maxima) die Resultante der beiden ganzzahligen Polynome

$f = x^4 + 182x^3 - 3788x^2 + 6282x + 10251$ und $g = x^4 - 174x^3 - 2812x^2 - 4386x + 7371$!

Der Befehl lautet in beiden Systemen `resultant(f, g, x)`.

b) Was können daraus auf den ggT der beiden Polynome in $\mathbb{Z}[x]$ schließen?

c) Bestimmen Sie alle Primzahlen p, für die der ggT von $f \bmod p$ und $g \bmod p$ positiven Grad hat!

d) Finden Sie zwei Polynome $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ mit einem linearen Polynom als ggT derart, daß der ggT von $f \bmod p$ und $g \bmod p$ in $\mathbb{F}_p[x]$ fur $p = 17$ quadratisch und für $p = 5$ kubisch ist!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Welche Bedingung müssen die beiden Zahlen $p, q \in \mathbb{C}$ erfüllen, damit die kubische Gleichung $x^3 + px + q = 0$ eine mindestens doppelte Nullstelle hat?

b) Wann gibt es sogar eine dreifache Nullstelle?

c) Wann haben die beiden kubischen Gleichungen $x^3 + px + q = 0$ und $x^3 + ax + b$ eine gemeinsame Nullstelle?

d) Wann haben sie zwei gemeinsame Nullstellen?

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Welche Bedingungen müssen die vier Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ erfüllen, damit die Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ zwei zweifache oder eine mindestens dreifache Nullstelle hat?

b) Finden Sie eine weitere Bedingung an a, b, c, d, die genau dann erfüllt ist, wenn es eine mindestens dreifache Nullstelle gibt!

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

a) Berechnen Sie die LANDAU-MIGNOTTE-Schranke für den ggT der beiden Polynome

$$f = x^5 + 3x^3 + x^2 + 3x + 2 \quad \text{und} \quad g = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 3x + 2\,!$$

b) Wählen Sie eine Primzahl p mit der Eigenschaft, daß der ggT von f und g durch seine Reduktion modulo p eindeutig bestimmt ist, und berechnen Sie den ggT von $f \bmod p$ und $g \bmod p$!

c) Welchen ggT haben f und g in $\mathbb{Z}[x]$?

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 29. September 2011, um 15.30 Uhr