Wolfgang K. Seiler

Harmonische Analyse

Unterlagen zum Schülerseminar über Bildverarbeitung
Universität Mannheim, 31. Oktober – 3. November 2002

WOLFGANG K. SEILER
Mathematisches Institut der
Universität Mannheim
Seminargebäude A5, C 201
68131 Mannheim

Tel. 181-2515
seiler@math.uni-mannheim.de
http://hilbert.math.uni-mannheim.de/∼seiler/

Kapitel 1
Harmonische Analyse

§ 1: Schwingungen und ihre Oberschwingungen

Niemand wird den Klang einer Geige mit dem einer Flöte verwechseln, auch wenn beide Instrumente dieselbe Melodie spielen. Der Grund dafür ist allgemein bekannt: Verschiedene Musikinstrumente produzieren zum selben Grundton verschiedene Obertöne. Anhand des Verhältnisses zwischen den Stärken dieser Obertöne (und auch dessen zeitlicher Variation) identifiziert unser Ohr die uns vertrauten Instrumente – auch wenn uns diese Verhältnisse quantitativ nicht bewußt sind.

Seit einiger Zeit arbeiten verschiedene Forscher daran, auch Computer anhand eines Musikstücks die verwendeten Instrumente erkennen zu lassen; dem Computer sind natürlich die Zahlenwerte für alle diese Verhältnisse bekannt, und eine seiner (einfacheren) Aufgaben besteht darin, jeden Ton einer Melodie in seine Grund- und Oberschwingungen zu zerlegen.

Auch bei den meisten gängigen Verfahren zur Bilderkennung besteht der erste Schritt in einer Zerlegung des Bilds (oder eines Bildteils) in so etwas wie Grund- und Oberschwingungen; die harmonische Analyse stellt das mathematische Werkzeug bereit, mit dem diese Zerlegung sowohl bei den Tönen als auch bei den Bildern rechnerisch durchgeführt werden kann.

Eine Melodie ist auf CD gespeichert und wird per Mikrophon oder auch Rundfunk übertragen als zeitlich variabler Schalldruck; Ausgangspunkt für eine Analyse ist für den Computer also eine Darstellung des Schalldrucks als Funktion der Zeit.

Auch bei der Bildverarbeitung hat man es mit einer Funktion zu tun: Im einfachsten Fall eines Einzelbilds in Schwarz/Weiß ist dies der Grauwert als Funktion der x- und der y-Koordinate, im Fall eines Farbvideos hat man drei Funktionen (zum Beispiel für den Rot-, Grün- und Blauanteil), die außer von x und y auch noch von der Zeit abhängen.

Zum Verständnis der grundsätzlichen Probleme ist es daher auch in einem Seminar über Bilderkennung sinnvoll, zunächst den einfacheren Fall der Musik zu betrachten und die dafür entwickelten Techniken danach so zu verallgemeinern, daß sie auch auf Bilder anwendbar werden.

a) Die schwingende Saite

Natürlich hat es keinen Sinn, hier die ganze Vielfalt musikalischer Töne zu betrachten; wir werden uns ausschließlich auf den einfachsten und anschaulichsten Fall beschränken, daß der Ton durch eine schwingende Saite erzeugt wird. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß die Saite ausschließlich senkrecht zu ihrer Ruhelage schwingt und daß diese Schwingung auf eine feste Ebene begrenzt ist; die Physiker bezeichnen dies als transversale linear polarisierte Schwingung, und zumindest in erster Näherung kann man einige Musikinstrumente so beschreiben.

Die mathematische Beschreibung selbst dieses einfachen Falls führt uns allerdings bereits aus der klassischen Schulmathematik hinaus: Der Zustand der Saite zu einem *festen Zeitpunkt* wird beschrieben durch eine Funktion der Längenkoordinate, die wir wie üblich mit x bezeichnen wollen. Der Wert dieser Funktion an jeder Stelle x ist aber, da die Saite schwingt, eine Funktion der Zeit; wir haben also insgesamt eine Funktion $f(x,t)$ sowohl der Längenkoordinate als auch der Zeit, die angibt, wie weit der Punkt mit Längenkoordinate x zum Zeipunkt t von seiner Ruhelage entfernt ist. Falls wir annehmen, daß die Schwingung in der x,y-Ebenen stattfindet, ist $f(x,t)$ also die y-Koordinate des Punktes mit Längenkoordinate x zum Zeitpunkt t. Da wir nur transversale linear polarisierte Schwingungen betrachten, hat dieser Punkt die Koordinaten

$$\bigl(x, f(x,t)\bigr) ;$$

falls wir auch longitudinale Schwingungen zugelassen hätten, würde auch die x-Koordinate von der Zeit abhängen, und falls wir uns nicht auf linear polarisierte Schwingungen festgelegt hätten, gäbe es auch noch eine z-Koordinate.

Die Saite ist an ihren beiden Ende fest ins Instrument eingespannt; wir normieren die Koordinaten auf der x-Achse so, daß diese Enden den Werten $x = 0$ und $x = L$ entsprechen, wobei $L \in \mathbb{R}$ die Länge der Saite bezeichnet. Da die beiden Enden nicht schwingen können, muß notwendigerweise

$$f(0,t) = 0 \quad \text{und} \quad f(L,t) = 0$$

sein; nur für $0 < x < L$ kann $f(x,t)$ von t abhängen.

Wie könnte f aussehen? In ihrer Ruhelage ist die Saite eine Strecke; die einfachste Form einer Schwingung könnte darin bestehen, daß diese Strecke durch einen Teil einer Sinuslinie ersetzt wird. Da die Funktion an den Stellen 0 und L verschwinden muß und der Sinus bei allen ganzzahligen Vielfachen von π verschwindet, kommen daher Funktionen der Art

$$f(x,t) = A(t) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}\right)$$

in Frage, wobei $A(t)$ irgendeine Funktion der Zeit ist und k eine natürliche Zahl. Abbildung 1 zeigt die entsprechenden Funktionen für $k = 1$ bis 4 und $A(t) \equiv 1$.

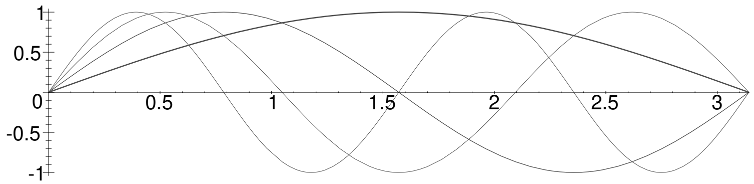


Abb. 1: Eine Schwingung mit Oberschwingungen

Auch für $A(t)$ ist, wenn wir periodische Schwingungen erwarten, ein Ansatz mit trigonometrischen Funktionen sinnvoll. Falls wir davon ausgehen, daß sich die Saite zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhelage befindet, ist

der Sinus die geeignete Funktion; wir versuchen es daher mit

$$A(t) = a \cdot \sin \omega t\,,$$

wobei a und ω reelle Konstanten sind, von denen wir zumindest ω als positiv voraussetzen können.

b) Partielle Ableitungen und die Differentialgleichung der schwingenden Saite

Es ist klar, daß ω und L voneinander abhängen, und da Oberschwingungen eine höhere Frequenz haben als die Grundschwingung, sollte ω auch größer werden, wenn wir ein größeres k betrachten. Zur Klärung des Zusammenhangs zwischen diesen Größen müssen wir einen kurzen Abstecher in die Physik machen und werden dabei auch die partiellen Ableitungen kennenlernen, die nachher in ganz anderem Zusammenhang auch für die Bilderkennung wichtig sein werden.

Da wir alles so einfach wie möglich halten wollen, gehen wir aus von einer Saite mit konstantem Querschnitt und konstanter Massendichte; letztere können wir dann beschreiben durch die Masse pro Längeneinheit, die für konkrete Saiten gemessen wird in Gramm pro Zentimeter oder Milligramm pro Zentimeter. Wir bezeichnen diese (lineare) Massendichte mit σ.

Die zweite wesentliche physikalische Größe für eine schwingende Saite ist deren *Spannung*. Auch hier beschränken wir uns wieder auf das einfachste physikalische Modell, in dem das HOOKEsche Gesetz gilt: Wir betrachten die Saite als eine elastische Feder, die eine natürliche Länge L_0 hat. Da sie aber in ein Musikinstrument eingespannt ist, wurde sie auf die Länge $L > L_0$ gedehnt, und nach dem HOOKEschen Gesetz wirkt deshalb eine Rückstellkraft $\lambda L/L_0$, die proportional ist zur Überdehnung L/L_0 mit der Federkonstanten λ als Proportionalitätsfaktor.

In der Ruhelage ist diese Rückstellkraft bedeutungslos: Da die Saite an beiden Enden fest eingespannt ist, kann sie ihre Länge nicht verringern. Anders wird es, wenn die Saite aus der Ruhelage entfernt wird: Dann hat die Federkraft in allen Punkten, an denen die (Tangente der) Saite nicht parallel zur x-Achse ist auch eine Kraftkomponente in y-Richtung.

Die Lage der ausgelenkten Saite zu einem festen Zeitpunkt t wird beschrieben durch die Funktion

$$g(x) = f(x,t)\,,$$

die y-Koordinate des Punkts x angibt.

Betrachten wir das Saitenstück zwischen $x = x_1$ und $x = x_2$. Im Punkt x_1 habe die Tangente den Winkel α gegenüber der Horizontalen, im Punkt x_2 sei dieser Winkel β. Die ausgelenkte Saite ist gegenüber der Ruhelage nochmals gestreckt; falls x_1 und x_2 einigermaßen nahe beieinander liegen, können wir die Saite zwischen x_1 und x_2 in erster Näherung als eine Gerade betrachten. Diese Gerade sei um den Winkel γ gegenüber der Horizontalen geneigt; dann hat das Stück zwischen $x = x_1$ und $x = x_2$ die Länge

$$\frac{x_2 - x_1}{\cos\gamma}\,,$$

denn der Cosinus eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck ist gleich Ankathete durch Hypothenuse.

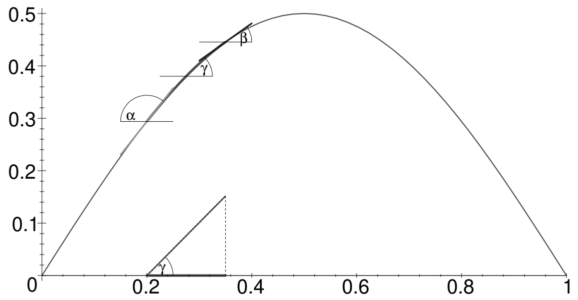


Abb. 2: Eine ausgelenkte Saite

Die Rückstellkraft *in Richtung der ausgelenkten Saite* ist daher gleich

$$\lambda\cdot\frac{L}{L_0}\cdot\frac{1}{\cos\gamma}\,,$$

und die Komponente in y-Richtung ist im Punkt x_1 gleich

$$\lambda\cdot\frac{L}{L_0}\cdot\frac{1}{\cos\gamma}\cdot\sin\alpha$$

und im Punkt x_2 entsprechend gleich

$$-\lambda\cdot\frac{L}{L_0}\cdot\frac{1}{\cos\gamma}\cdot\sin\beta\,.$$

Da α und β bei gängigen Musikinstrumenten ziemlich klein sind, machen wir kein großen Fehler, wenn wir die Näherungsformeln

$$\sin x \approx x \approx \tan x$$

für im Bogenmaß gemessene Winkel x benutzen; demnach können wir also den Sinus in obigen Formeln ohne großen Genauigkeitsverlust durch einen Tangens ersetzen.

Der Tangens des Steigungswinkels der Tangenten des Graphs einer Funktion $y = g(x)$ gegenüber der Horizontalen ist gleich der Ableitung $g'(x)$, die Rückstellkräfte im Anfangs- und im Endpunkt des betrachteten Kurvenstücks sind also näherungsweise gleich

$$-\lambda\cdot\frac{L}{L_0}\cdot\frac{1}{\cos\gamma}\cdot g'(x_1) \quad\text{und}\quad \lambda\cdot\frac{L}{L_0}\cdot\frac{1}{\cos\gamma}\cdot g'(x_2)\,.$$

Bei einem hinreichen kleinen Saitenstück ist die resultierende Rückstelkraft gleich der Summe dieser beiden Komponenten, also

$$\lambda\cdot\frac{L}{L_0}\cdot\frac{1}{\cos\gamma}\cdot g'(x_2) - \lambda\cdot\frac{L}{L_0}\cdot\frac{1}{\cos\gamma}\cdot g'(x_1) = \lambda\cdot\frac{L}{L_0}\cdot\frac{1}{\cos\gamma}\cdot\bigl(g'(x_2) - g'(x_1)\bigr)\,.$$

Da wir von sehr kleinen Winkeln γ ausgehen, liegt $\cos\gamma$ sehr nahe bei eins und kann, da wir hier ohnehin nur näherungsweise argumentieren, gleich eins gesetzt werden; die Rückstellkraft ist also näherungsweise gleich

$$\lambda\cdot\frac{L}{L_0}\cdot\bigl(g'(x_2) - g'(x_1)\bigr)\,.$$

Diese Kraft bedingt nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz eine Bewegung der Massenpunkte auf der Saite. Ein solcher Massenpunkt mit x-Koordinate x_0 hat eine zeitabhängige Auslenkung

$$h(t) = f(x_0,t)\,,$$

und für die Kraft, die dies bewirkt, gilt nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}\,.$$

Bei einem hinreichend kleinen Saitenstück können wir die Masse näherungsweise gleich der Masse des gesamten Stück setzen, also gleich

$$m = \sigma \cdot (x_2 - x_1) .$$

Die Beschleunigung ist gleich der zweiten Ableitung der Auslenkung, also gleich $h''(t)$. Somit gilt insgesamt

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \left(g'(x_2) - g'(x_1)\right) = \sigma \cdot (x_2 - x_1) \cdot h''(t)$$

oder

$$\frac{g'(x_2) - g'(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\sigma L_0}{\lambda L} h''(t) .$$

Lassen wir nun x_2 und x_1 simultan gegen einen dazwischenliegenden Punkt x gehen, konvergiert die linke Seite gegen $g''(x)$, wir bekommen also die Gleichung

$$g''(x) = \frac{\sigma L_0}{\lambda L} h''(t) .$$

Damit sind wir fast fertig; wir müssen uns nur noch klarmachen, daß die beiden Funktionen $g(x)$ und $h(t)$ spezielle Werte der Funktion $f(x,t)$ berechnen: Für einen oben festgehaltenen (aber nicht weiter spezifizierten) Zeitpunkt t ist $g(x) = f(x,t)$, und für einen ebenfalls festgehaltenen (aber nicht weiter spezifizierten) Punkt x auf der Saite ist $h(t) = f(x,t)$. Tatsächlich stehen also in der gerade hergeleiteten Gleichung sowohl links als auch rechts Ableitungen von f.

Diese Ableitungen können wir nicht einfach als $f''(x,t)$ schreiben, denn es gibt schließlich *zwei* Variablen x und t nach denen differenziert werden könnte. Der Begriff der *partiellen Ableitung* erlaubt es zwischen diesen beiden Fällen zu unterscheiden:

Die partielle Ableitung $f_x(x,t)$ der Funktion $f(x,t)$ nach x wird gebildet, indem man t als Konstante betrachtet und die Funktion so nach x ableitet. Für die partielle Ableitung $f_t(x,t)$ nach t wird entsprechend x als Konstante betrachtet und dann nach t abgeleitet.

Ein einfaches Beispiel soll dies verdeutlichen: Angenommen,

$$f(x,t) = x^4 + 2x^2t^2 + xe^t .$$

Dann ist

$$f_x(x,t) = 4x^3 + 4xt^2 + e^t ,$$

denn im zweiten Term ist t^2, genau wie die Zwei, einfach ein Vorfaktor von x^2, dessen Ableitung $2x$ ist. Entsprechend ist der dritte Term eine lineare Funktion von x, deren Ableitung gleich dem Koeffizienten von x ist, also gleich e^t.

Genauso leicht läßt sich auch

$$f_t(x,t) = 4x^2t + xe^t$$

berechnen: Der erste Summand x^4 hängt nicht von t ab, wird also als konstant betrachtet und hat somit die Ableitung null. Die Ableitung des zweiten Summanden berechnet sich genauso wie bei der partiellen Ableitung nach x, nur daß jetzt die Rollen von x und y vertauscht sind. Der letzte Summand schließlich ist, da wir x als Konstante betrachten, ein konstantes Vielfaches der Exponentialfunktion, und solche Funktionen haben sich selbst als Ableitung.

Formal ist

$$f_x(x,t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h}$$

und

$$f_t(x,t) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,t+k) - f(x,t)}{k}$$

– falls diese Limites existieren. Andernfalls existieren die entsprechenden partiellen Ableitungen nicht, genau wie ja auch eine Funktion einer Veränderlichen nicht differenzierbar sein muß.

Auch $f_x(x,t)$ und $f_t(x,t)$ sind wieder Funktionen zweier Veränderlicher und können daher, so die Ableitungen existieren, weiter partiell abgeleitet werden; im Symbol drücken wir dies dadurch aus, daß die Variable nach der abgeleitet wird, im Index hinten angehängt wird. Im obigen Beispiel wäre also die partielle Ableitung von

$$f_x(x,t) = 4x^3 + 4xt^2 + e^t$$

nach x

$$f_{xx}(x,t) = 12x^2 + 4t^2$$

und die partielle Ableitung nach t wäre

$$f_{xt}(x,t) = 8xt + e^t .$$

Wegen

$$f_t(x,t) = 4x^2t + xe^t$$

ist entsprechend

$$f_{tx}(x,t) = 8xt + e^t \quad \text{und} \quad f_{tt}(x,t) = 4x^2 + xe^t .$$

Zurück zur Beschreibung der schwingenden Saite! Dort hatten wir die Beziehung

$$g''(x) = \frac{\sigma L_0}{\lambda L} h''(t)$$

mit

$$g(x) = f(x,t) \quad \text{und} \quad h(t) = f(x,t)$$

für festgehaltenes t *bzw.* x; mit partiellen Ableitungen geschrieben wird dies offenbar einfach zu

$$f_{xx}(x,t) = \frac{\sigma L_0}{\lambda L} f_{tt}(x,t)$$

oder, wie man meist schreibt,

$$f_{tt}(x,t) = \frac{\lambda L}{\sigma L_0} f_{xx}(x,t) .$$

Da es uns auf exakte Zahlenwerte nicht ankommt, wählen wir noch eine Abkürzung für den Bruch; da er positiv ist, können wir ihn als Quadrat schreiben und definieren

$$c^2 \underset{\text{def}}{=} \frac{\lambda L}{\sigma L_0} .$$

Mit dieser neuen Bezeichnung wird die Differentialgleichung der schwingenden Saite also kurz zu

$$f_{tt}(x,t) = c^2 f_{xx}(x,t) .$$

Diese Gleichung allein legt $f(x,t)$ bei weitem noch nicht eindeutig fest: Sind φ und ψ *irgendwelche* zweifach stetig differenzierbare Funktionen, so überzeugt man sich leicht, daß

$$f(x,t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

eine Lösung dieser Gleichung ist, die sogenannte D'ALEMBERTsche Lösung. Sie zeigt, daß man die Konstante c interpretieren kann als die Schallgeschwindigkeit *innerhalb der Saite;* die beiden Terme beschreiben Erregungen, die sich gegenläufig auf der Saite fortbewegen.

Wir waren oben ausgegangen von speziellen sinusförmigen Lösungen der Form

$$f(x,t) = A(t) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = a \cdot \sin\omega t \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

und müssen nun sehen, für welche Parameterwerte dies Lösungen sind.

Die partiellen Ableitungen von f sind

$$f_t(x,t) = a\omega \cdot \cos\omega t \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

$$f_{tt}(x,t) = -a\omega^2 \cdot \sin\omega t \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = -\omega^2 f(x,t)$$

$$f_x(x,t) = a \cdot \sin\omega t \cdot \left(\frac{k\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

$$f_{xx}(x,t) = -a \cdot \sin\omega t \cdot \left(\frac{k\pi}{L}x\right)^2 \sin\left(\frac{k\pi}{L}\right) = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 f(x,t) ,$$

also ist

$$f_{tt}(x,t) = \left(\frac{k\pi}{\omega L}\right)^2 f_{xx}(x,t) .$$

Die Differentialgleichung ist somit genau dann erfüllt, wenn

$$c = \frac{k\pi}{\omega L} \quad \text{oder} \quad \omega = k \cdot \frac{\pi}{cL} ,$$

die Frequenz wächst also in der Tat linear mit k.

c) Beispiele von Fourier-Reihen

Die Töne, die durch die Schwingung einer Saite oder einer Luftsäule (in einer Flöte) oder eines Fells einer Trommel verursacht werden, beschreibt man in der Musik als Überlagerungen eines Grundtons mit

Obertönen. Eine erstaunliche Entdeckung des französischen Mathematikers JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER besteht darin, daß man (fast) jede periodische Funktion in reine Sinus- und oder Cosinusschwingungen zerlegen kann.

JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768–1830) begann zunächst mit einer Ausbildung zum Priester, beendete diese jedoch nicht, sondern wurde stattdessen Mathematiklehrer. 1793 trat er dem lokalen Revolutionskomittee bei, 1798 begleitete er Napoleon auf dessen Ägyptenfeldzug. Nach dem Rückzug aus Ägypten ernannte ihn Napoleon zum Präfekten von Isére; dort in Grenoble begann er mit seinen Arbeiten über Wärmeleitung, aus denen die FOURIER-Reihen hervorgingen. Nach Napoleons endgültiger Vertreibung wurde FOURIER 1817 in die Akademie der Wissenschaften gewählt; 1822 wurde er Sekretär der mathematischen Sektion.

Betrachten wir etwa die (unendliche) Summe

$$f(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell} \sin \ell t$$

und lassen uns vom Computer Bilder von Teilsummen (hier mit eins, drei und zwanzig Summanden) zeichnen.

Das Ergebnis ist in Abbildung drei zu sehen; offensichtlich nähern sich die Teilsummen immer mehr der „Sägezahnschwingung“

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \quad \text{für} \quad 0 \le t < 2\pi\,,$$

periodisch fortgesetzt auf ganz $\mathbb{R}$ mit Periode 2π.

Entsprechend können wir die Teilsumme betrachten, die nur ungerade Indizes enthält, also

$$f(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell-1)t}{(2\ell-1)}\,,$$

deren Teilsummen in Abbildung vier zu sehen sind:

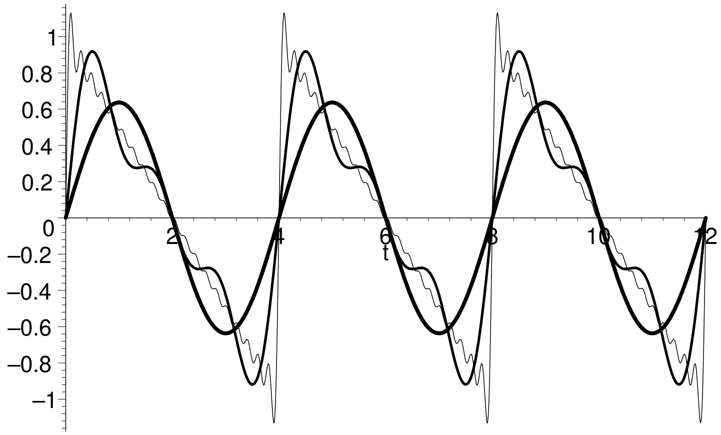


Abb. 3: FOURIERpolynome für die Sägezahnschwingung

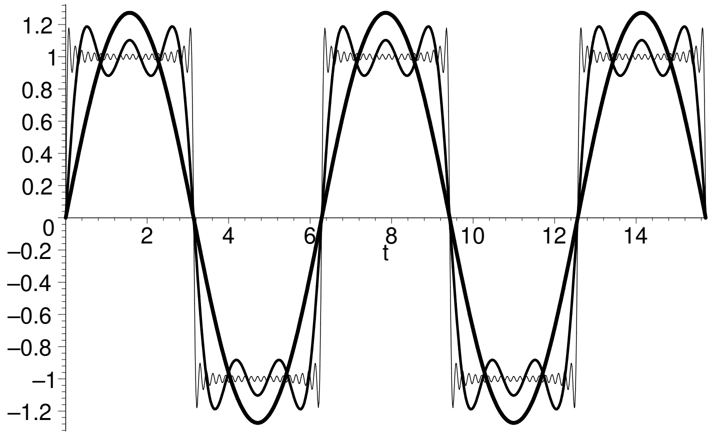


Abb. 4: FOURIERpolynome für Rechteckimpulse

Hier nähern sich die Teilsummen immer mehr den Rechteckimpulsen

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{für } 0 \le t < \pi \\ -\frac{\pi}{4} & \text{für } \pi \le t < 2\pi \end{cases},$$

periodisch fortgesetzt durch die Vorschrift

$$f(t+2\pi) = f(t) \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Im allgemeinen werden Sinusterme allein nicht ausreichen, denn da der Sinus an der Stelle null verschwindet, lassen sich so nur Funktionen erhalten, die ebenfalls diese Eigenschaft haben; nimmt man aber noch Cosinusterme mit dazu, werden wir sehen, daß sich so in der Tat jede periodische Funktion „ziemlich gut“ darstellen läßt.

Wer experimentieren will, findet ein Java-Applet zur graphischen Darstellung solcher Überlagerungen aus Sinus- und Cosinusschwingungen unter `http://www.gac.edu/~huber/fourier/` .

§2: Komplexe Darstellung der trigonometrischen Funktionen

Jeder hat wohl irgendwann in der Mittelstufe Formeln wie

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \text{oder} \quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

gesehen, aber nur wenige kennen alle diese Formeln auswendig, und kaum jemand rechnet gerne mit ihnen. Deutlich einfacher und angenehmer ist der Umgang mit Potenzen; hier hat man stattdessen Regeln wie

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad \text{und} \quad a^{3x} = \left(a^x\right)^3,$$

mit denen niemand Schwierigkeiten haben sollte. Einer der vielen Gründe für die Nützlichkeit komplexer Zahlen besteht darin, daß sie es erlauben, die unangenehmen Rechenregeln für trigonometrische Funktionen durch die sehr viel einfacheren Regeln für den Umgang mit Potenzfunktionen zu ersetzen.

a) Komplexe Zahlen

Am Anfang waren die natürlichen Zahlen.

Man kann sie addieren und multiplizieren, aber die Gleichung

$$15x = 4$$

läßt sich nicht in natürlichen Zahlen lösen, obwohl wahrscheinlich schon die steinzeitlichen Jäger gelegentlich vier erlegte Wildscheine unter 15 Jägern verteilen wollten.

Mathematisch ist das ganz einfach: Mit dem neuen Symbol

$$\frac{4}{15}$$

ist das Problem zwar nicht gelöst, aber es war zumindest wegdefiniert, und man konnte daran gehen, das Rechnen mit diesen Brüchen zu untersuchen und Generationen von begeisterten Drittklässlern beizubringen.

Am begeistertsten waren die Pythagoräer, die vor rund zweieinhalb Tausend gleich so weit gingen, daß die die ganze Welt mit diesen Brüchen oder (wie sie es nannten) Proportionen erklären wollten. Das ging so lange gut, bis einer von Ihnen, HIPPASOS VON METAPONT, herausfand, daß die Länge der Diagonalen in einem Quadrat der Seitenlänge eins nicht als Bruch dargestellt werden kann.

Der erste Versuch, dieses Problems zu lösen, war sehr drastisch: Der Legende nach soll HIPPASOS ertränkt worden sein. Da die Pythagoräer sehr gute und erfahrene Mathematiker waren, wußten Sie allerdings durchaus, daß das noch nicht die endgültige Lösung des Problems sein konnte. Die große Schwierigkeit war, daß sich bald herausstellte, daß man hier nicht nur eine neue Zahl wie etwa $\sqrt{2}$ hinzudefinieren mußte sondern erheblich mehr. Die Lösung fand schließlich, in PLATONs Akademie, der Mathematiker EUDOXOS, dessen Lehre von den Irrationalitäten über EUKLIDs Elemente noch heute bekannt ist, nachdem es wahrscheinlich schon vorher andere Ansätze gegeben hatte, die heute nur noch fragmentarisch erhalten sind. Die auf EUDOXOS zurückgehende Erweiterung des Zahlbereichs sind in heutiger Sprechweise die positiven reellen Zahlen.

Negative Zahlen (und die Null) mußten noch etwas warten: Gleichungen wie

$$x + 5 = 3\,.$$

braucht man weder für das Verteilen von Wildschweinen noch zur Berechnung geometrischer Größen, und wenn auch spätestens mit dem ersten Geld die ersten Schulden kamen, sind Vermögen und Schulden in ihren praktischen Auswirkungen so verschieden, daß niemand ein unüberwindliches Bedürfnis verspürte, durch Erweiterung des gängigen Zahlbereichs Schulden als negatives Vermögen zu definieren und umgekehrt. Erst mit der Mathematisierung der Naturwissenschaften kam die Zeit für das nächste Wegdefinieren eines Problems

Für den nächsten Schritt, die Einführung der komplexen Zahlen, gab es zumindest historisch keinerlei praktische Notwendigkeit, allein mathematisch-ästhetische Gesichtspunkte: Die Gleichung $x^2 = 2$ ist in den reellen Zahlen zwar lösbar, nicht aber die Gleichung

$$x^2 = -1 .$$

Auch wenn es, wie gesagt, damals keine außermathematischen Probleme gab, die etwas mit der Lösung dieser Gleichung zu tun hatten, führte einfach der Wunsch nach einer inneren Geschlossenheit der Mathematik dazu, den alten Trick des Wegdefinierens auch hier wieder anzuwenden. Das Ergebnis war so erfolgreich, daß es auf der Sonderbriefmarke zu Ehren von CARL FRIEDRICH GAUSS festgehalte wurde, wenn auch nicht auf dem ebenfalls ihm gewidmeten Zehnmarkschein (Dort geht es um seine Beiträge zur Statistik und zur Vermessung des Königreichs Hannover): Der alte Trick besagt, daß man einfach die Lösung $x = \sqrt{-1}$ als neues Symbol einführt. Da es damals noch keine realen Anwendungen dafür gab, wählte GAUSS dafür das Symbol i wie *imaginär* und setzte

$$i \underset{\text{def}}{=} \sqrt{-1} .$$

Wenn man damit rechnen will, muß man auch Ausdrücke der Art

$$z = x + iy$$

mit beliebigen reellen Zahlen x, y zulassen; diese werden als *komplexe,* d.h. zusammengesetzte Zahlen bezeichet und ihre Gesamtheit als Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Sobald man bei diesem Körper angekommen ist, braucht man nichts mehr wegzudefinieren, denn der (alles andere als triviale) *Fundamentalsatz der Algebra* besagt, daß jede Polynomgleichung mit komplexen Koeffizienten auch eine komplexe Lösung hat.

CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) leistete wesentliche Beiträge zur Zahlentheorie, zur nichteuklidischen Geometrie, zur Differentialgeometrie und Kartographie, zur Fehlerrechnung und Statistik, zur Astronomie und Geophysik *usw.* Als Direktor der Göttinger Sternwarte baute er zusammen mit dem Physiker WEBER den ersten Telegraphen. Er leitete die erste Vermessung und Kartierung des Königreichs Hannover und zeitweise auch den Witwenfond der Universität Göttingen; seine hierbei gewonnene Erfahrung benutzte er für erfolgreiche Spekulationen mit Aktien. Seine Ergebnisse sind so allgegenwärtig in der Mathematik, daß er schon zu Lebzeiten *Fürst der Mathematiker* genannt wurde.

Das Rechnen mit diesen Zahlen ist, falls man die „üblichen“ Rechenregeln beibehalten will, durch die Beziehung $i^2 = -1$ bereits vollständig festgelegt: Für

$$z = x + iy \quad \text{und} \quad w = u + iv$$

mit reellen Zahle x, y, u, v ist natürlich

$$z \pm w = (x + u) \pm i(y + v)$$

und auch

$$z \cdot w = (x + iy)(u + iv) = xu + i(yu + xv) + i^2 yv = (xu - yv) + i(yu + xv)$$

läßt sich problemlos ausmultiplizieren. Lediglich bei der Division muß man etwas nachdenken: Nach der dritten binomischen Formel ist

$$(u + iv)(u - iv) = u^2 - (iv)^2 = u^2 - i^2 v^2 = u^2 + v^2$$

stets eine reelle Zahl, und damit ist

$$\frac{x + iy}{u + iv} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{u^2 + v^2} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i \cdot \frac{yu - xv}{u^2 + v^2} .$$

Beispielsweise ist also

$$(2 + 3i)(4 + 5i) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 5 + (2 \cdot 5 + 3 \cdot 4)i = -2 + 22i$$

und

$$\frac{1}{i} = \frac{-i}{i \cdot (-i)} = \frac{-i}{1} = -i ,$$

was man sich auch einfacher hätte überlegen können: Da $i^2 = -1$ ist, folgt sofort, daß

$$i \cdot (-i) = -i^2 = 1$$

ist, also $1/i = -i$.

Interessanter sind Rechungen wie

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

oder

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1^2+2i+i^2}{2} = \frac{2i}{2} = i\,,$$

was man zur Probe noch einmal nachrechnen kann über

$$(1-i)\cdot i = i - i^2 = i + 1 = 1 + i\,.$$

Da eine komplexe Zahl $z = x + iy$ durch das Paar (x, y) reeller Zahlen bestimmt ist, können wir sie auch durch den Punkt (x, y) in einem ebenen kartesischen Koordinatensystem veranschaulichen. Addition und Subtraktion komplexer Zahlen entsprechen dabei offensichtlich gerade der Addition und Subtraktion von Vektoren, die den Nullpunkt mit der jeweiligen komplexen Zahl verbinden.

b) Die Eulerschen Formeln

Die Multiplikation kann man besser verstehen, wenn man anstelle von kartesischen Koordinaten *Polarkoordinaten* verwendet, die einen Punkt z festlegen durch seinen Abstand r vom Nullpunkt und den Winkel φ, den der Strahl von Null nach z mit der reellen Achse bildet. Diesen Winkel messen wir im sogenannten *Bogenmaß:* Die Größe des Winkels ist demnach die Länge des Kreisbogens auf dem Kreis mit Radius eins, den der Winkel ausschneidet. Das Vorzeichen ist dabei so gewählt, daß die Richtung von der positiven reellen zur positiven imaginären Achse positiv, die Gegenrichtung negativ angegeben wird. Der mathematisch positive Drehsinn ist demnach der *Gegenuhrzeigersinn;* der Uhrzeigersinn wird negativ gerechnet.

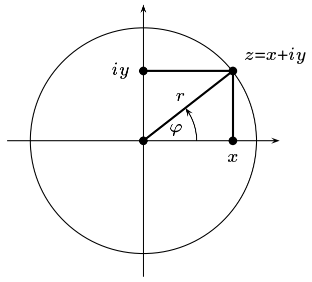


Abb. 5: Polarkoordinaten einer komplexen Zahl

In einem rechtwinkligen Dreieck ist bekanntlich der Sinus eines der beiden spitzen Winkel gleich dem Verhältnis der Gegenkathete zur Hypothenuse und der Cosinus das der Ankathete zur Hypothenuse. Somit ist hier für $r \neq 0$, d.h. für $z \neq 0$,

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}$$

oder

$$x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi\,,$$

und nach PYTHAGORAS ist $x^2 + y^2 = r^2$.

Berechnen wir nun das Produkt zweier komplexer Zahlen z und w mit Polarkoordinatendarstellung (r, φ) und (s, ψ)! In kartesischer Darstellung ist

$$z = r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi \quad \text{und} \quad w = s\cos\psi + i\,s\sin\psi\,,$$

also ist nach obiger Formel

$$\begin{aligned} z\cdot w = {} & \big(r\cos\varphi\cdot s\cos\psi - r\sin\varphi\cdot s\sin\psi\big) \\ & + i\big(r\cos\varphi\cdot s\sin\psi \;+\; r\sin\varphi\cdot s\cos\psi\big) \\ = {} & rs\cdot\Big(\big(\cos\varphi\cdot\cos\psi - \sin\varphi\cdot\sin\psi\big) \\ & \qquad + i\big(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\big)\Big) \\ = {} & rs\cdot\Big(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\Big)\,. \end{aligned}$$

Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen multiplizieren sich also die Beträge, während sich die Argumente addieren.

Damit verhalten sich komplexe Zahlen vom Betrag eins wie Potenzen: Definieren wir für jeden Winkel φ eine komplexe Zahl

$$e_\varphi \underset{\text{def}}{=} \cos\varphi + i\sin\varphi\,,$$

so ist für zwei Winkel φ und ψ

$$e_{\varphi+\psi} = e_\varphi \cdot e_\psi\,.$$

Dies entspricht der Rechenregel

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

für den Umgang mit Potenzen. Daher *definieren* wir dies formal als eine komplexe Potenz

$$e^{i\varphi} \underset{\text{def}}{=} \cos\varphi + i\sin\varphi$$

und merken uns die fundamentale Rechenregel

$$e^{i\varphi}\cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}\,.$$

Viele kennen wahrscheinlich bereits die Exponentialfunktion als die Potenzfunktion mit der EULERschen Zahl

$$e \approx 2{,}71828\;18284\;59045\;23536$$

als Basis und werden sich fragen, was obige Definition damit zu tun hat. Als TAYLOR-Reihe dargestellt ist

$$e^x = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!} \quad \text{für } x\in\mathbb{R}\,,$$

und man kann zeigen, daß diese Reihe auch dann konvergiert, wenn für x eine komplexe Zahl einsetzt. Speziell für $x = i\varphi$ mit einer reellen Zahl φ ist

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(i\varphi)^k}{k!} = \sum_{k=0}^\infty \frac{i^k\varphi^k}{k!} = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ gerade}}}^\infty \frac{i^k\varphi^k}{k!} + \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ ungerade}}}^\infty \frac{i^k\varphi^k}{k!} \\ &= \sum_{\ell=0}^\infty \frac{i^{2\ell}}{(2\ell)!} + \sum_{\ell=0}^\infty \frac{i^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} = \sum_{\ell=0}^\infty \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} + i\sum_{\ell=0}^\infty \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} \\ &= \cos\varphi + i\sin\varphi\,. \end{aligned}$$

Auch über die TAYLOR-Reihe der Exponentialfunktion kommen wir also zum gleichen Ausdruck für $e^{i\varphi}$.

Die Formel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

heißt EULERsche Formel nach dem Schweizer Mathematiker LEONHARD EULER, der sie als erster aufgestellt hat. Ersetzt man φ durch $-\varphi$, wird sie zu

$$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi\,,$$

und addiert *bzw.* subtrahiert man dies von der ursprünglichen Formel, so ergeben sich die beiden Beziehungen

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \quad\text{und}\quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\,,$$

die ebenfalls auf EULER zurückgehen.

LEONHARD EULER (1707–1783) wurde in Basel geboren und ging auch dort zur Schule und, im Alter von 14 Jahren, zur Universität. Dort legte er zwei Jahre später die Magisterprüfung in Philosophie ab und begann mit dem Studium der Theologie; daneben hatte er sich seit Beginn seines Studium unter Anleitung von JOHANN BERNOULLI mit Mathematik beschäftigt. 1726 beendete er sein Studium in Basel und bekam eine Stelle an der Petersburger Akademie der Wissenschaften, die er 1727 antrat. Auf Einladung FRIEDRICHS DES GROSSEN wechselte er 1741 an die preußische Akademie der Wissenschaften; nachdem sich das Verhältnis zwischen den beiden dramatisch verschlechtert hatte, kehrte er 1766 nach St. Petersburg zurück. Im gleichen Jahr erblindete er vollständig; trotzdem schrieb er rund die Hälfte seiner zahlreichen Arbeiten (73 Bände) danach. Sie enthalten bedeutende Beiträge zu vielen Gebieten der Mathematik, Physik, Astronomie und Kartographie.

Mit den EULERschen Formeln lassen sich viele Identitäten für trigonometrische Funktionen leicht ausrechnen, z.B.

$$\sin^2\varphi = \left(\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2i\varphi}-2+e^{-2i\varphi}}{-4} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\varphi}{2}$$

oder

$$\begin{aligned}\cos^3\varphi &= \left(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3i\varphi}+3e^{i\varphi}+3e^{-i\varphi}+e^{-3i\varphi}}{8} \\ &= \frac{\cos 3\varphi + 3\cos\varphi}{4}\,.\end{aligned}$$

Allgemein können wir für zwei ganze Zahlen k und ℓ die Produkte

$$\begin{aligned}
\cos k\varphi \cdot \cos \ell\varphi &= \left(\frac{e^{ik\varphi}+e^{-ik\varphi}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\ell\varphi}+e^{-i\ell\varphi}}{2}\right)\\
&= \frac{e^{i(k+\ell)\varphi}+e^{i(k-\ell)\varphi}+e^{i(-k+\ell)\varphi}+e^{-i(k+\ell)\varphi}}{4}\\
&= \frac{e^{i(k+\ell)\varphi}+e^{-i(k+\ell)\varphi}}{4}+\frac{e^{i(k-\ell)\varphi}+e^{-i(k-\ell)\varphi}}{4}\\
&= \frac{1}{2}\Bigl(\cos(k+\ell)\varphi+\cos(k-\ell)\varphi\Bigr)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin k\varphi \cdot \sin \ell\varphi &= \left(\frac{e^{ik\varphi}-e^{-ik\varphi}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i\ell\varphi}-e^{-i\ell\varphi}}{2i}\right)\\
&= \frac{e^{i(k+\ell)\varphi}-e^{i(k-\ell)\varphi}-e^{i(-k+\ell)\varphi}+e^{-i(k+\ell)\varphi}}{-4}\\
&= -\frac{e^{i(k+\ell)\varphi}+e^{-i(k+\ell)\varphi}}{4}+\frac{e^{i(k-\ell)\varphi}+e^{-i(k-\ell)\varphi}}{4}\\
&= \frac{1}{2}\Bigl(\cos(k-\ell)\varphi-\cos(k+\ell)\varphi\Bigr) \quad \text{und}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos k\varphi \cdot \sin \ell\varphi &= \left(\frac{e^{ik\varphi}+e^{-ik\varphi}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\ell\varphi}-e^{-i\ell\varphi}}{2i}\right)\\
&= \frac{e^{i(k+\ell)\varphi}-e^{i(k-\ell)\varphi}+e^{i(-k+\ell)\varphi}-e^{-i(k+\ell)\varphi}}{4i}\\
&= \frac{e^{i(k+\ell)\varphi}-e^{-i(k+\ell)\varphi}}{4i}-\frac{e^{i(k-\ell)\varphi}+e^{-i(k-\ell)\varphi}}{4i}\\
&= \frac{1}{2}\Bigl(\sin(k+\ell)\varphi+\sin(k-\ell)\varphi\Bigr)
\end{aligned}$$

über die EULERschen Formeln berechnen.

§3: Die Fourier-Reihe einer periodischen Funktion

Nach all diesen Rechnungen mit trigonometrischen Funktionen und komplexen Zahlen wird es Zeit, wieder an unser eigentliches Ziel zu denken: die Zerlegung einer beliebigen Schwingung in eine (im allgemeinen unendliche) Summe reiner Sinus- und Cosinusschwingungen.

a) Koordinatendarstellung bezüglich orthogonaler Vektoren

Überlegen wir uns zunächst, wie wir im dreidimensionalen EUKLIDischen Raum $\mathbb{R}^3$ einen Vektor $\vec{v}$ als Linearkombination dreier aufeinander senkrecht stehender Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ darstellen können: Wir suchen reelle Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, so daß gilt

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3\,.$$

Bilden wir auf beiden Seiten das Skalarprodukt mit $\vec{v}_i$, so folgt

$$\vec{v}\cdot\vec{v}_i = \lambda_1\vec{v}_1\cdot\vec{v}_i + \lambda_2\vec{v}_2\cdot\vec{v}_i + \lambda_3\vec{v}_3\cdot\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}\cdot\vec{v}_i\,,$$

denn da die $\vec{v}_i$ aufeinander senkrecht stehen, ist das Skalarprodukt zweier verschiedener solcher Vektoren null. Damit erhalten wir λ_i leicht als

$$\lambda_i = \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}_i}{\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i}\,.$$

Beispielsweise stehen die drei Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\quad \text{und}\quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$$

aufeinander senkrecht; wenn wir den Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$$

daraus linear kombinieren möchten, berechnen wir

$$\lambda_1 = \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}_1}{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3},\quad \lambda_2 = \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}_2}{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2} = \frac{10}{5} = 2$$

und

$$\lambda_3 = \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}_3}{\vec{v}_3\cdot\vec{v}_3} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}\,.$$

Also ist

$$\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}.$$

b) Die Orthogonalitätsrelationen für trigonometrische Funktionen

Ähnlich wollen wir auch bei der Darstellung einer periodischen Funktion als Summe reiner Sinus- und Cosinusschwingungen vorgehen. Dazu brauchen wir als erstes ein „Skalarprodukt" solcher Schwingungen.

Wir betrachten zu einer festen Periode $T > 0$ die Menge aller Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Periode T, d.h. für alle $t \in \mathbb{R}$ soll gelten

$$f(t+T) = f(t)\,.$$

Um Schwierigkeiten im Umgang mit diesen Funktionen zu vermeiden, wollen wir außerdem voraussetzen, daß sie im Intervall von 0 bis T bis auf höchstens endlich viele Sprungstellen stetig ist.

Für zwei solche Funktionen f und g definieren wir ihr „Skalarprodukt" durch die Vorschrift

$$(f,g) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot g(t)\,dt\,.$$

(Das Skalarprodukt heißt nicht $f\cdot g$, weil man es sonst mit der Funktion verwechseln könnte, die jedem Wert $t \in \mathbb{R}$ den Funktionswert $f(t)\cdot g(t)$ zuordnet.)

Dieses „Skalarprodukt" hat all die üblichen Eigenschaften, die wir vom Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ gewohnt sind: Beispielsweise ist für drei Funktionen f, g, h und zwei reelle Zahlen λ, μ

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g, h) &= \frac{1}{T}\int_0^T \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\cdot h(t)\,dt\\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \big(\lambda f(t)\cdot h(t) + \mu g(t)\cdot h(t)\big)\,dt\\ &= \frac{\lambda}{T}\int_0^T f(t)\cdot h(t)\,dt + \frac{\mu}{T}\int_0^T f(t)\cdot h(t)\,dt\\ &= \lambda(f,h) + \mu(g,h)\end{aligned}$$

und

$$(g,f) = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)\cdot f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot g(t)\,dt = (f,g)\,.$$

Außerdem ist

$$(f,f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt \geq 0\,,$$

da der Intergrand überall größer oder gleich null ist. Das einzige kleine Problem besteht darin, daß beispielsweise für $T = 1$ die Funktion

$$f(t) = \begin{cases}1 & \text{falls } t \in \mathbb{Z}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

zwar nicht gleich der Nullfunktion ist, aber trotzdem ist

$$(f,f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt = 0\,.$$

Das ist aber kein großes Problem, und wir wollen es hier einfach ignorieren.

Nach den Vorbereitungen aus dem letzten Paragraphen können wir einige Beispiele berechnen – falls wir die Produkte $f(t)g(t)$ integrieren können.

Beispielsweise ist für jede periodische Funktion f

$$(f,1)=\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\,dt\,,$$

und das können wir insbesondere für trigonometrische Funktionen ausrechnen: Sowohl Sinus als auch Cosinus haben die Periode 2π, d.h.

$$\sin(t+2\pi)=\sin t \quad \text{und} \quad \cos(t+2\pi)=\cos t$$

für alle Werte von t. Wenn wir Funktionen einer vorgegebenen Periode T brauchen, müssen wir das Argument reskalieren: Für eine reelle Zahl ω ist

$$\sin\bigl(\omega(t+T)\bigr)=\sin(\omega t+\omega T)=\sin\omega t\,,$$

falls ωT ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist, also ω ein Vielfaches von $\frac{2\pi}{T}$. Wir definieren

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

als *Kreisfrequenz* der Schwingung und halten fest, daß dann für jede ganze Zahl $k\in\mathbb{Z}$ die Funktion

$$f(t)=\sin k\omega t$$

periodisch ist mit Periode T (tatsächlich sogar mit der kleineren Periode T/k für $|k|>1$). Genau dasselbe gilt natürlich auch für

$$g(t)=\cos k\omega t\,.$$

Zur Integration solcher Funktionen über eine volle Periode T müssen wir praktisch nichts über Integralrechnung wissen: Der Sinus ist während einer Periode genauso oft oberhalb wie unterhalb der Achse und ist symmetrisch zum Intervallmittelpunkt, das Integral des Sinus über eine volle Periode ist also null:

$$\int\limits_0^T \sin\omega t\,dt=0 \quad \text{für} \quad \omega=\frac{2\pi}{T}\,.$$

Ersetzt man ω durch $k\omega$, so ändert das nichts wesentliches: Statt über eine volle Periode integrieren wir nun über $|k|$ Perioden von $\sin k\omega t$,

das Ergebnis ist also k-mal null. Dies gilt auch im Entartungsfall $k=0$, denn dann ist $\sin 0\omega t=0$ einfach die Nullfunktion. Somit ist

$$\int\limits_0^T \sin k\omega t\,dt=0 \quad \text{für} \quad \omega=\frac{2\pi}{T} \text{ und } k\in\mathbb{Z}\,.$$

Beim Cosinus ist es im wesentlichen genauso: Zunächst ist $\cos\omega t$ eine Viertelperiode lang positiv, dann eine halbe Periode lang negativ und schließlich wieder eine Viertelperiode lang positiv, und auch hier heben sich die positiven und die negativen Beiträge zum Integral weg. Genauso verhält es sich bei $\cos k\omega t$ mit $k\neq 0$, denn dann passiert das gleiche einfache $|k|$-mal hintereinander. Somit ist

$$\int\limits_0^T \cos k\omega t\,dt=0 \quad \text{für} \quad \omega=\frac{2\pi}{T} \text{ und } k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\,.$$

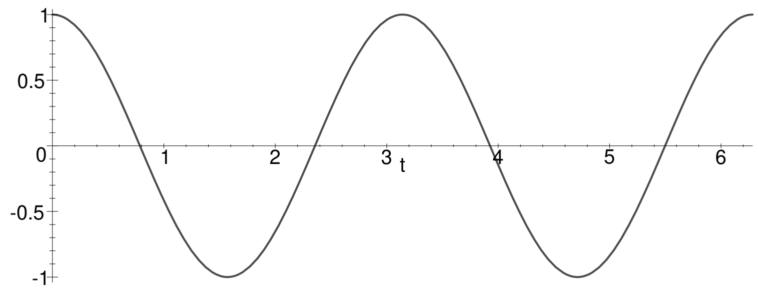


Abb. 5: $\cos 2t$ im Intervall $[0,2\pi]$

Bleibt noch der Fall $k=0$: Dann ist $\cos k\omega t=\cos 0=1$, also

$$\int\limits_0^T \cos k\omega t\,dt=\int\limits_0^T 1\,dt=T \quad \text{für} \quad k=0\,.$$

Da das Integral bei der Bildung des Skalarprodukts noch durch T dividiert wird, ist also

$$(1, f) = \begin{cases} 0 & \text{für } \begin{cases} f(t) = \sin k\omega t & \text{mit } k \in \mathbb{Z} \text{ oder} \\ f(t) = \cos k\omega t & \text{mit } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases} \\ 1 & \text{für } f(t) = \cos k\omega t \text{ mit } k = 0, \text{ d.h. } f(t) = 1 \end{cases} .$$

Damit können wir nun mit den oben aus der EULERschen Formel hergeleiteten Beziehungen alle Produkte von Sinus- und Cosinusschwingungen der Periode T ausrechnen:

$$\begin{aligned}(\cos k\omega t, \cos \ell\omega t) &= \frac{1}{T}\int_0^T \cos k\omega t \cdot \cos \ell\omega t\, dt \\ &= \frac{1}{2T}\int_0^T \cos(k+\ell)\omega t\, dt + \frac{1}{2T}\int_0^T \cos(k-\ell)\omega t\, dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \pm\ell \\ \frac{1}{2} & \text{falls } k = \pm\ell \neq 0 \\ 1 & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases} ,\end{aligned}$$

und genauso

$$\begin{aligned}(\sin k\omega t, \sin \ell\omega t) &= \frac{1}{T}\int_0^T \cos k\omega t \cdot \cos \ell\omega t\, dt \\ &= \frac{1}{2T}\int_0^T \cos(k-\ell)\omega t\, dt - \frac{1}{2T}\int_0^T \cos(k+\ell)\omega t\, dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \pm\ell \\ \frac{1}{2} & \text{falls } k = \pm\ell \neq 0 \\ 0 & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases} .\end{aligned}$$

Am einfachsten ist

$$\begin{aligned}(\cos k\omega t, \sin \ell\omega t) &= \frac{1}{T}\int_0^T \cos k\omega t \cdot \cos \ell\omega t\, dt \\ &= \frac{1}{2T}\int_0^T \sin(k+\ell)\omega t\, dt + \frac{1}{2T}\int_0^T \sin(k-\ell)\omega t\, dt \\ &= 0 .\end{aligned}$$

Wenn wir also das System der Funktionen

$$1, \qquad \cos k\omega t \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad \sin \ell\omega t \quad \text{mit} \quad \ell \in \mathbb{N}$$

betrachten, so verschwindet das Skalarprodukt (f, g) für je zwei verschiedene Funktionen aus dieser Liste und (f, f) ist eins für $f = 1$ und sonst gleich ein halb.

c) Berechnung der Fourier-Reihe

Mit dem Wissen aus dem letzten Abschnitt wiederholen wir den Ansatz von oben, als wir einen Vektor als Linearkombination von paarweise aufeinander senkrecht stehenden Vektoren ausgedrückt hatten: Wir setzen an

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \sin \ell\omega t ,$$

und *wenn* die Funktion so darstellbar ist, muß gelten

$$(f, 1) = a_0(1, 1) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\cos k\omega t, 1) + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell(\sin \ell\omega t, 1) = a_0 ,$$

d.h.

$$a_0 = \frac{(f, 1)}{(1, 1)} = (f, 1) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt .$$

Für $k > 0$ ist entsprechend

$$
\begin{aligned}
(f, \cos k\omega t) &= a_0(1, \cos k\omega t) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(\cos m\omega t, \cos k\omega t) \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell(\sin \ell\omega t, \cos k\omega t) \\
&= a_k(\cos k\omega t, \cos k\omega t) = \frac{a_k}{2}\,,
\end{aligned}
$$

d.h.

$$a_k = 2(f, \cos k\omega t) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t\, dt\,,$$

und für $\ell > 0$

$$
\begin{aligned}
(f, \sin \ell\omega t) &= a_0(1, \sin \ell\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\cos k\omega t, \sin \ell\omega t) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_\ell(\sin n\omega t, \sin \ell\omega t) \\
&= b_\ell(\sin \ell\omega t, \sin \ell\omega t) = \frac{b_\ell}{2}\,,
\end{aligned}
$$

d.h.

$$b_\ell = 2(f, \sin \ell\omega t) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin \ell\omega t\, dt\,.$$

Wenn also eine periodische Funktion als Linearkombination reiner Schwingungen darstellbar ist, dann haben wir hiermit diese Darstellung gefunden. Mit deutlich mehr Aufwand als hier in diesem Seminar möglich ist, kann man zeigen, daß diese Zerlegung in der Tat praktisch immer funktioniert: Dort, wo f stetig ist, gibt es überhaupt keine Probleme, und an den (nach Voraussetzung nur endlich vielen) Sprungstellen konvergiert die rechte Seite gegen den Mittelwert aus linksseitigem und rechtsseitigem Grenzwert von f.

d) Komplexe Form der Fourier-Reihen

Wir können die EULERschen Formeln in obige Form der FOURIER-Reihe einsetzen und erhalten

$$
\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \sin \ell\omega t \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{e^{i\cdot k\omega t} + e^{-i\cdot k\omega t}}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \frac{e^{i\cdot \ell\omega t} - e^{-i\cdot \ell\omega t}}{2i} \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} e^{i} \cdot k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} e^{-i\cdot k\omega t} \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{b_\ell}{2i} e^{i\cdot \ell\omega t} - \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{b_\ell}{2i} e^{-i\cdot \ell\omega t} \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} e^{i} \cdot k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} e^{-i\cdot k\omega t} \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{-ib_\ell}{2} e^{i\cdot \ell\omega t} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{ib_\ell}{2} e^{-i\cdot \ell\omega t} \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{i} \cdot k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-i\cdot k\omega t} \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{i\cdot k\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-i\cdot k\omega t} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\cdot k\omega t}
\end{aligned}
$$

mit

$$c_k = \begin{cases} a_0 & \text{für } k = 0 \\ \frac{a_k - ib_k}{2} & \text{für } k > 0 \\ \frac{a_k + ib_k}{2} & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

Explizit ist also für $k > 0$

$$c_k = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,dt - i\cdot\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega t\,dt\right)$$
$$= \frac{1}{T}\left(\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,dt - i\int_0^T f(t)\sin k\omega t\,dt\right) .$$

Für zwei reelle Funktionen $g(t)$, $h(t)$ und reelle Zahlen λ, μ ist

$$\int_0^T \bigl(\lambda f(t) + \mu g(t)\bigr)\,dt = \lambda\int_0^T g(t)\,dt + \mu\int_0^T h(t)\,dt ,$$

und das wollen wir für $\lambda = 1$ und $\mu = i$ dazu verwenden, um Integrale über komplexwertige Funktionen zu *definieren:*

Für die komplexwertige Funktion $f(t) = g(t) + ih(t)$ ist

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt + i\int_a^b h(t)\,dt .$$

Mit dieser Definition ist für $k > 0$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\bigl(\cos k\omega t - i\sin k\omega t\bigr)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\cdot k\omega t}\,dt ,$$

und diese Formel gilt so offensichtlich auch für $k < 0$. Sie gilt sogar für $k = 0$, denn dann ist $e^{i\cdot 0\cdot\omega t} = e^0 = 1$. Die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\cdot k\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\cdot k\omega t}$$

heißt komplexe FOURIER-Reihe von f; wie man sieht, läßt sie sich sehr viel kompakter hinschreiben als die reelle.

§4: Harmonische Analyse nichtperiodischer Signale

a) Ein Grenzübergang

In den vorigen Paragraphen haben wir periodische Funktionen mittels ihrer FOURIER-Reihen als Überlagerungen reiner Schwingungen dargestellt. Diese Zerlegung einer Funktion in Sinus- und Cosinusschwingungen verschiedener Frequenzen ist nicht nur für periodische Funktionen nützlich; angesichts der Tatsache, daß das Verhalten vieler elektronischer Bauteile von der Frequenz abhängt, würde man gerne *jede* Funktion entsprechend zerlegen. Es ist allerdings klar, daß FOURIER-Reihen, wie wir sie bislang kennen, dazu nicht geeignet sind, denn da dort alle beteiligten Frequenzen Vielfache eine festen Grundfrequenz sind, muß auch die Summe mindestens die der Grundfrequenz entsprechende Periode haben. Trotzdem liefern FOURIER-Reihen einen Ansatz auch für zumindest einige Klassen nichtperiodischer Funktionen.

Für eine beliebige reelle Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wählen wir dazu zunächst eine (große) Periode T und betrachten die Funktion $f_T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf dem Intervall $(-T/2, T/2]$ mit f übereinstimmt und dann periodisch mit Periode T auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Die FOURIER-Reihe von f_T ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ki\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k = \widehat{f}_T(k) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-ki\omega t}\,dt$$

und $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Um f selbst darzustellen, müssen wir T gegen unendlich gehen lassen; um das Verhalten von c_k bei Veränderung von T kontrollieren zu können, definieren wir dazu eine Funktion $C(\nu)$ als

$$C(\nu) \underset{\text{def}}{=} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i\nu t}\,dt .$$

Mit dieser Definition ist

$$c_k = \frac{1}{T}C(k\omega) = \frac{\omega}{2\pi}C(k\omega) ,$$

und die FOURIER-Reihe von f_T läßt sich schreiben als

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k\omega)e^{i(k\omega)t}\omega\,.$$

Wäre dies eine endliche Summe, etwa

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} C(k\omega)e^{i(k\omega)t}\omega\,,$$

so könnten wir sie auffassen als RIEMANN-Summe für

$$\int_{-N\omega}^{(N+1)\omega}\frac{1}{2\pi}C(\nu)e^{i\nu t}\,d\nu$$

bei einer äquidistanten Unterteilung mit Intervallbreite ω. Falls also ω gegen Null geht (und damit $T = 2\pi/\omega$ gegen unendlich) und gleichzeitig N gegen unendlich, konvergiert die FOURIER-Reihe gegen das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}C(\nu)e^{i\nu t}\,d\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}C(\nu)e^{i\nu t}\,d\nu\,,$$

sofern dieses existiert.

Im Idealfall sollte also gelten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}C(\nu)e^{i\nu t}\,d\nu \quad\text{mit}\quad C(\nu) \underset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\nu t}\,dt$$

und wir definieren

Definition: Für $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ bezeichnen wir die Funktion

$$\widehat{f}\colon\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ \omega\mapsto\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt\end{cases},$$

so sie existiert, als FOURIER-Transformierte von f.

Damit sollte dann also gelten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\,,$$

und diese Konstruktion, die f aus $\widehat{f}$ rekonstruiert, heißt *inverse* FOURIER-*Transformation:*

Definition: Für $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ bezeichnen wir die Funktion

$$\check{g}\colon\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ t\mapsto\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega\end{cases}$$

als inverse FOURIER-Transformierte von g.

Offensichtlich ist

$$\check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(-\omega) \quad\text{und}\quad \widehat{g}(t) = 2\pi\check{g}(-t)\,.$$

Die Existenz der FOURIER-Transformierten, d.h. die Konvergenz des uneigentlichen Integrals aus der Definition, sowie auch die obigen Formeln für $\check{\widehat{f}}$ und $\widehat{\check{f}}$ sind leider alles andere als selbstverständlich: Für $f(t) = 1$ oder auch $f(t) = e^{i\omega t}$ oder $f(t) = t^n$ und in vielen weiteren Fällen kann das Integral für $\widehat{f}(\omega)$ schon aus ganz trivialen Gründen nicht existieren. Die FOURIER-Transsformierte existiert nur dann, wenn die Funktion f zumindest *im wesentlichen* auf ein endliches Intervall lokalisiert ist; außerhalb dieses Intervalls muß sie sehr schnell gegen null gehen. Um Einzelheiten wollen wir uns hier nicht kümmern.

b) Mehrdimensionale Fouriertransformation und Fraunhofer-Beugung

Bilder sind im Gegensatz zu Tönen zweidimensional, für ihre harmonische Analyse brauchen wir daher eine zweidimensionale FOURIER-

Transformation. Für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ definieren wir

$$\widehat{f}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \\ (\omega_1, \omega_2) \mapsto \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)}\,dx\,dy \end{cases},$$

ohne uns gar zu viele Gedanken darüber zu machen, wie man ein solches zweidimensionales Integral konkret ausrechnet.

Als physikalisches Beispiel für die Nützlichkeit einer solchen Transformation können wir die FRAUNHOFER-Beugung betrachten:

Wenn Licht auf Strukturen trifft, in Vergleich zu deren Größe seine Wellenlänge nicht mehr vernachlässigbar klein ist, lassen sich die Gesetze der geometrischen Optik bekanntlich nicht mehr anwenden; man beobachtet dann Beugungsphänomene.

Beugung ist ein sehr komplexes Gebiet; wir müssen uns hier auf den allereinfachsten Fall beschränken. Wir gehen daher aus von einem Lichtstrahl, der aus sehr großer Entfernung kommt oder der zumindest (z.B. dank einer Linse, aus deren Brennpunkt er kommt) so aussieht, und beobachten auch die Beugungsfigur in großer Entfernung. Diese Situation bezeichnet man als FRAUNHOFER-Beugung.

JOSEPH VON FRAUNHOFER (1787–1826) wurde in Straubing als elftes und letztes Kind eines Glasermeisters geboren; er machte auch selbst eine Lehre als Glasschleifer und Spiegelmacher. Daneben besuchte er die Feierabendschule, wo er zumindest primitive Grundkenntnisse im Rechnen erwarb. 1806 kam er an das optische Institut von UTZSCHNEIDER, der ihm Bücher über Optik und Mathematik besorgte. FRAUNHOFER entwickelte Präzisionsmaschinen zur Fertigung optischer Instrumente von bis dahin nicht gekannter Qualität und erfand auch das optische Gitter. Durch seine Versuche zur Lichtbeugung bewies er die Wellennatur des Lichts. 1824 wurde er zum Professor ernannt, der in Sonntagsvorlesungen über seine Arbeit berichtete; im gleichen Jahr wurde er auch vom bayrischen König LUDWIG I. in den Adelsstand erhoben. Zwei Jahre später starb er an Tuberkulose.

Zur mathematischen Behandlung der optischen Beugung brauchen wir zunächst ein physikalisches Modell für Lichtwellen. Für eine

physikalisch korrekte Beschreibung müssen wir Licht als zeitlich veränderliches elektromagnetisches Feld betrachten, d.h. wir brauchen zwei räumlich und zeitlich variable Vektorfelder $\vec{E}(x,y,z;t)$ und $\vec{B}(x,y,z;t)$, die den MAXWELLschen Gleichungen genügen. Glücklicherweise muß man in der Optik aber nur selten so weit gehen: Zwar hängt die Beugung an einem Spalt theoretisch durchaus von der Leitfähigkeit des verwendeten Materials ab, aber diese Abhängigkeit ist so gering, daß man sie für alle praktischen Zwecke vernachlässigen kann.

Man arbeitet daher in der Wellenoptik gerne mit einer sogenannten *skalaren Welle,* über deren physikalische Bedeutung man sich keine sonderlichen Gedanken macht. Aus rechnerischen Gründen betrachtet man sie als komplexwertige Funktion; falls man sich unbedingt etwas darunter vorstellen will, kann man beispielsweise den Realteil dieser Funktion als die x-Komponente des elektrischen Felds interpretieren, muß dann aber beachten, daß eine skalare Welle im Gegensatz zu einem elektrischen Feld *keine* Wechselwirkung mit Materie egal welcher Leitfähigkeit zeigt – das ist eine der Idealisierungen hinter dem Konzept der skalaren Welle. Wichtig für uns ist nur, daß die Intensität der Welle (also z.B. die Intensität der Beugungslinien, die wir auf einem Schirm beobachten) gleich dem Betragsquadrat der Wellenfunktion sein soll.

Eine Welle hat eine räumliche wie auch zeitliche Periodizität. Zeitlich periodische Vorgänge kennen wir bereits: Das sind Schwingungen, die mathematisch durch Funktionen der Art

$$f(t) = A_0 e^{i\omega t} \quad \text{oder etwas allgemeiner} \quad f(t) = A_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$$

beschrieben werden, wobei die Phasenverschiebung φ dafür sorgt, daß wir auch Schwingungen behanden können, die ihre maximale Auslenkung nicht zur Zeit $t = 0$ erreichen. Wir wollen dies jedoch im folgenden ignorieren und mit der einfacheren ersten Funktion arbeiten.

Für räumlich periodische Vorgänge haben wir entsprechend zur Periode T einer Schwingung eine Wellenlänge λ; das Analogon zur Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ bezeichnen wir als

$$\textit{Wellenzahl} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}\,.$$

Ein eindimensionaler periodischer Vorgang kann somit beschrieben werden durch eine Funktion

$$g(x) = A_0 e^{ikx} .$$

Im Mehrdimensionalen müssen wir die Wellenzahl k ersetzen durch einen Vektor $\vec{k}$ der Länge k, den *Wellenzahlvektor,* und betrachten die Funktion

$$g(\underline{x}) = A_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} .$$

(Die Wellenlänge betrachten wir weiterhin nur als Skalar.)

Eine Welle soll zeitlich *und* räumlich periodisch sein; dies leistet die Funktion

$$\psi(\underline{x}, t) = A_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$$

oder natürlich auch die entsprechende Funktion mit einem Pluszeichen im Exponenten. Der Grund, warum wir das Minuszeichen bevorzugen, ist folgender:

Im eindimensionalen Fall ist

$$\psi(x, t) A_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} = A_0 e^{ik\left(\frac{\omega}{k}t - x\right)} ,$$

$\psi(x, t)$ hängt also nur ab von $x - \frac{\omega}{k}t$. Dies können wir auch so interpretieren, daß

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda\omega}{2\pi}$$

die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist; denn eine Änderung der Zeit um Δt hat denselben Effekt wie eine Änderung des Orts um $v \cdot \Delta t$.

Im Falle mehrerer räumlicher Dimensionen ist alles grundsätzlich genauso, nur die Schreibweise ist etwas komplizierter: Ist $\vec{k}_0$ ein Einheitsvektor in Richtung von $\vec{k}$, d.h. $\vec{k} = k \cdot \vec{k}_0$, so ist

$$\psi(\underline{x}, t) = A_0 e^{ik\left(\frac{\omega}{k}t - \vec{k}_0\cdot\vec{x}\right)} ;$$

dabei ist $\vec{k}_0 \cdot \vec{x}$ die $\vec{x}$-Komponente in Richtung von $\vec{k}$. Damit ist $\vec{k}_0$ die *Richtung* des Geschwindigkeitsvektors; der Wellenzahlvektor zeigt also in Richtung der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, und der Betrag v des Geschwindigkeitsvektors ist durch obige Formel gegeben.

Die Annahme einer konstanten Amplitude A_0 in obigen Formeln ist nur in seltenen Fällen realistisch: Licht kommt meist aus einer (zumindest in erster Näherung) punktförmigen Lichtquelle, und seine Intensität nimmt mit dem Quadrat der Entfernung ab. Da die Intensität das Betragsquadrat der Wellenfunktion sein soll, müssen wir eine solche Kugelwelle also in der Form

$$\psi(\underline{x}, t) = \frac{A_0}{|\vec{x}|} e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$$

ansetzen, sofern die Lichtquelle im Nullpunkt des Koordinatensystems sitzt.

Im Falle einer weit entfernten Lichtquelle, wie wir sie bei der FRAUNHOFER-Beugung annehmen und auch von der Sonne her kennen, spielt allerdings die Ortsabhängigkeit der Amplitude praktisch keine Rolle, so daß wir keinen nennenswerten Fehler machen, wenn wir sie als konstant annehmen. In diesem Fall sprechen wir von einer *ebenen* Welle.

Ausgangspunkt für die Berechnung von Beugungsbilder ist das HUYGENSsche Prinzip: Jeder Punkt des Hindernisses ist Quelle einer Kugelwelle, deren Amplitude gleich der Amplitude der einfallenden Welle mal der Durchlässigkeitsfunktion α des Hindernisses im betrachteten Punkt ist. Letztere gibt an, welcher Teil des Lichts durchgelassen wird; sie ist also eins an den Stellen, an denen alles Licht durchkommt, und null dort, wo nichts durchkommt. An Stellen, an denen ein Teil des Lichts durchgelassen wird, kann sie auch Zwischenwerte annehmen.

CHRISTIAAN HUYGENS (1629–1695) kam aus einer niederländischen Diplomatenfamilie. Dadurch und später auch durch seine Arbeit hatte er Kontakte zu führenden europäischen Wissenschaftlern wie DESCARTES und PASCAL. Nach seinem Studium der Mathematik und Jura arbeitete er teilweise auch selbst als Diplomat, interessierte sich aber bald vor allem für Astronomie und den Bau der dazu notwendigen Instrumente. Er entwickelte eine neue Methode zum Schleifen von Linsen und erhielt ein Patent für die erste Pendeluhr. Trotz des französisch-niederländischen Kriegs arbeitete er einen großen Teil seines Lebens an der *Académie Royale des Sciences* in Paris, wo beispielsweise LEIBNIZ viel Mathematik bei ihm lernte. HUYGENS war ein scharfer

Kritiker sowohl von NEWTONs Theorie des Lichts als auch seiner Gravitationstheorie, die er für absurd und nutzlos hielt. Gegen Ende seines Lebens beschäftigte er sich mit der Möglichkeit außerirdischen Lebens.

Bei der FRAUNHOFER-Beugung betrachten wir auch die gebeugten Wellen nur aus sehr großer Entfernung und können daher statt von Kugelwellen von ebenen Wellen ausgehen. Außerdem können wir die Zeitabhängigkeit der Welle ignorieren, denn die Frequenzen, mit denen das sichtbare Licht schwingt, liegen um Größenordnungen jenseits sowohl unserer Reaktionszeit als auch der unserer Meßinstrumente, so daß wir nur die Amplituden messen können. Schreiben wir die einfallende Welle als $\psi(\underline{x}, t) = A_0 e^{-i\vec{k}\vec{x}} \cdot e^{i\omega t}$, ist also der zweite Faktor eine zeitabhängige Phasenvariation, die wir bei der Berechnung des räumlichen Intensitätsverteilung des Beugungsbilds ignorieren können.

Eine weitere Konsequenz des (auch im Vergleich zur Größe des Hindernisses) weit entfernten Betrachtungspunkts ist, daß wir das Hindernis vom Schirm aus praktisch nur als Punkt sehen; was an einer gegebenen Stelle des Schirms ankommt, hängt also im wesentlichen nur ab vom Winkel θ oder (im Zweidimensionalen) den Winkeln θ und φ, unter dem (oder denen) die Strahlen von diesem „Punkt" ausgehen.

Um die Intensität des Beugungsbilds in einem gegebenen Punkt zu berechnen, müssen wir also alle vom Hindernis in einem festen Winkel ausgehenden Strahlen aufsummieren, und *hierbei* müssen wir auch die Phasen berücksichtigen, da diese Strahlen miteinander interferieren. Abbildung sechs zeigt, wie sich die Laufwege zweier benachbarter Strahlen unterscheiden, und diese Differenzen können wir nicht vernachlässigen, da sie in der Größenordnung des Hindernisses und damit auch der Wellenlänge des Lichts liegen.

Betrachten wir zunächst den (in Abbildung sechs dargestellten) eindimensionalen Fall. Verglichen mit dem Strahl, der von einem (irgendwie gewählten) Nullpunkt des Hindernisses ausgeht, hat der Strahl mit Ausgangspunkt in Entfernung x einen Laufwegunterschied von $x \sin\theta$; dies entspricht einem Phasenfaktor von $e^{-ik\sin\theta}$. Wählen wir also die Phase im Nullpunkt als Referenz (die wir in den zu ignorierenden Phasenfaktor der einfallenden Welle hineinziehen können), ist die Summe aller unter

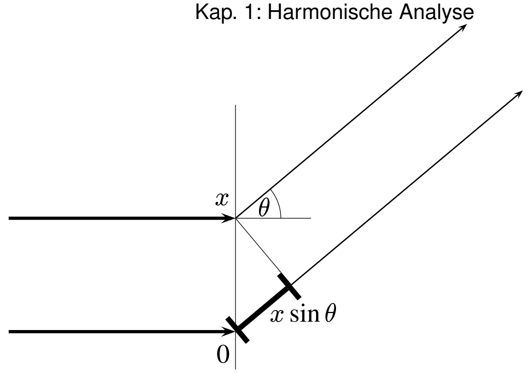


Abb. 6: Laufwegunterschied zweier paralleler Strahlen

dem Winkel θ abgehenden Strahlen gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) e^{-ik\sin\theta}\, dx\ ;$$

das ist gleich der FOURIER-Transformierten von $\alpha(x)$, ausgewertet im Punkt $u = k\sin\theta$.

Bei einem zweidimensionalen Hindernis müssen entsprechend zwei Winkelvariablen θ und ϕ berücksichtigt werden, und auch die Durchlässigkeitsfunktion α hängt von zwei Variablen x, y ab; außerdem müssen wir nun vom Wellenzahlvektor sowohl die x- auch auch die y-Komponente berücksichtigen. Wir erhalten daher als Summe aller Strahlen unter den beiden gegeben Winkeln das Integral

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \alpha(x, y) e^{-i(k_1 \sin\theta + k_2 \sin\phi)}\, dx\, dy\ ,$$

d.h. die zweidimensionale FOURIER-Transformierte von α, ausgewertet im Punkt $(u,\ v) = (k_1 \sin\theta,\ k_2 \sin\varphi)$.

Zur Vereinfachung der Schreibweise drückt man das Beugungsbild meist einfach in der Variablen u *bzw.* den Variablen u und v aus statt in den Winkelvariablen; dann ist das Beugungsbild eines Hindernisses mit Durchlässigkeitsfunktion α somit einfach die FOURIER-Transformierte von α. Allerdings muß man dabei beachten, daß u und v, obwohl man sie als Strecken interpretieren kann, *nicht* proportional zu den Strecken sind, die man auf einem ebenen Schirm messen kann: Deren Längen sind proportional zu $\tan\theta$ und $\tan\varphi$.

Dies wollen wir anwenden, um als erstes das Beugungsbild eines Spalts zu berechnen. Dieser habe die Breite a; seine Durchlässigkeitsfunktion kann also beispielsweise geschrieben werden als

$$\alpha\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) e^{-uix}\, dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-iux} dx \\ &= \frac{e^{-\frac{iau}{2}} - e^{\frac{iau}{2}}}{-iu} = \frac{2\sin\frac{au}{2}}{u} = a\frac{\sin\frac{au}{2}}{\frac{au}{2}}\,. \end{aligned}$$

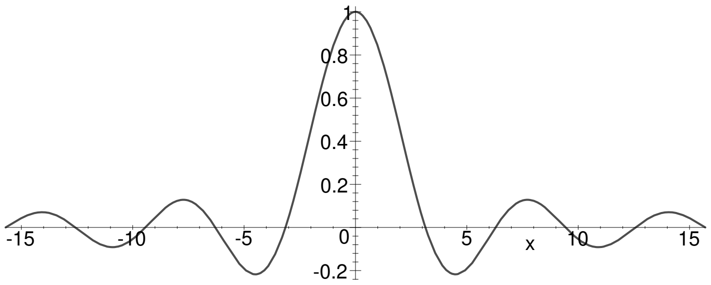


Abb. 7: Die Spaltfuntkion $\frac{\sin x}{x}$

Die Lichtintensitäten, die man im Beugungsbild beobachtet, sind allerdings *nicht* durch diese Funktion gegeben: $\widehat{\alpha}(u)$ ist die Amplitude einer skalaren Welle; die Intensität ist gleich dem Quadrat davon.

Ich möchte zumindest ein Beispiel eines zweidimensionalen Beugungsbilds betrachten. Leider sind die zugehörigen FOURIER-Integrale schon

in einfachen Fällen wie dem einer scheibenförmigen Blende nicht mehr elementar auswertbar; wir beschränken uns daher auf den extrem einfachen Fall einer rechteckigen Blende. Deren Durchlässigkeitsfunktion ist

$$\alpha\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2} \text{ und } -\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases},$$

die Beugungsfigur ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}(u,v) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \alpha(x,y) e^{-i(ux+vy)}\, dx\, dy = \iint_{\substack{-\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2}\le y\le\frac{b}{2}}} e^{-i(ux+vy)}\, dx\, dy \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-iux} e^{-ivy}\, dx\, dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-iux} \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-ivy}\, dy \right) dx \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-iux} \cdot \frac{\sin\frac{bv}{2}}{v}\, dx = 4 \cdot \frac{\sin\frac{au}{2}}{u} \cdot \frac{\sin\frac{bv}{2}}{v}\,. \end{aligned}$$

Als Beugungsfigur erhalten wir, nicht gerade überraschenderweise, das Produkt einer vertikalen und einer horizontalen Beugungsfigur eines Spalts.

c) Der Abtastsatz von Nyquist

Egal ob es um die automatische Erfassung von Meßwerten geht oder um die Aufzeichnung von Musik: Die digitale Darstellung analoger Daten ist wesentlicher Bestandteil der Informationsverarbeitung. Nun ist aber eine beliebige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sicherlich nicht durch ihre Funktionswerte an endlich vielen Stellen oder auch an ein einer diskreten Menge von Stellen bestimmt: Auch wenn wir wissen, daß $f(t) = 0$ ist für jedes ganzzahlige Vielfache von 0,001, wissen wir noch nicht, daß f die Nullfunktion ist: Auch die Funktionen $f(t) = \sin(1000\pi t)$ und $f(t) = -3\sin(5000\pi t)$ haben diese Eigenschaft. Auch bei von null verschiedenen Abtastwerten tritt dieses Problem auf: Beispielsweise stimmen auch die Funktionen

$$f(t) = \cos(500\pi t) \quad \text{und} \quad g(t) = \cos(1500\pi t)$$

für alle ganzzahligen Vielfachen von 0,001 überein, aber sie nehmen hier abwechselnd die Werte $1, 0, -1, 0$ an; siehe Abbildung acht. Da der Frequenzunterschied zwischen den beiden Schwingungen fast dem zwischen Baß und Sopran entspricht, ist klar, daß man die beiden Schwingungen zumindest auf einer Musik-CD nicht miteinander verwechseln darf.

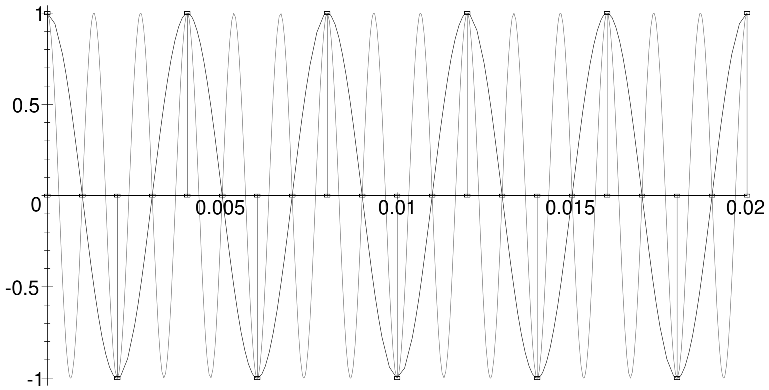


Abb. 8: Abtastung zweier Schwingungen

Die Probleme bei den obigen Beispielen beruhen offensichtlich darauf, daß es zu jedem Signal höherfrequente Signale gibt, die an vorgegebenen Punkten mit ihm übereinstimmen; man muß daher eine Grenze festlegen, oberhalb derer Frequenzen nicht mehr berücksichtigt werden sollen. Der Abtastsatz von NYQUIST sagt, wo diese Grenze liegen sollte:

Satz: Die Funktion f habe die Eigenschaft, daß $\widehat{f}(\omega)$ außerhalb eines Intervalls der Länge Ω verschwinde. Dann ist f eindeutig bestimmt durch die Werte $f(2k\pi/\Omega)$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis: (ω_1, ω_2) sei ein Intervall der Länge Ω derart, daß $\widehat{f}(\omega)$ außerhalb

dieses Intervalls verschwindet. Dann ist für fast alle $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \check{\widehat{f}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega\ ;$$

indem wir f durch die rechte Seite ersetzen (was nichts wesentliches ändert) können wir annehmen, daß dies für *alle* $t \in \mathbb{R}$ gilt. Also ist insbesondere

$$f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \widehat{f}(\omega) e^{2k\pi i\omega/\Omega}\, d\omega\ .$$

Nun betrachten wir jene Funktion $g(\omega)$, die auf dem Intervall $[\omega_1, \omega_2)$ mit $\widehat{f}(\omega)$ übereinstimmt und die periodisch mit Periode $2\pi\Omega$ in ω ist. Für diese Funktion ist dann natürlich auch

$$f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} g(\omega) e^{2k\pi i\omega/\Omega}\, d\omega\ ,$$

denn im Integrationsintervall stimmen $\widehat{f}$ und g überein.

g als periodische Funktion in ω mit Periode Ω hat eine Darstellung als FOURIER-*Reihe*

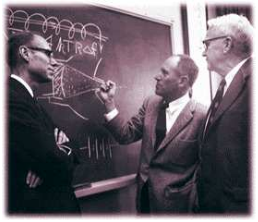
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\lambda\omega} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\Omega}\ ,$$

und der k-te FOURIER-Koeffizient ist

$$c_k = \frac{1}{\Omega} \int_{2\pi\omega_1}^{2\pi\omega_2} g(\omega) e^{-ik\lambda\omega}\, d\omega = \frac{1}{\Omega} \int_{2\pi\omega_1}^{2\pi\omega_2} g(\omega) e^{-i\omega k/\Omega}\, d\omega$$

$$= \frac{2\pi}{\Omega} f\left(\frac{-2k\pi}{\Omega}\right)\ .$$

Durch die Werte $f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right)$ sind also alle FOURIER-Koeffizienten von g bestimmt, damit auch (fast überall) die Funktion $g(\omega)$, und damit auch die Funktion $\widehat{f}(\omega)$, die im Intervall $[\omega_1, \omega_2)$ mit $g(\omega)$ übereinstimmt und außerhalb (außer eventuell im Punkte ω_2) verschwindet. Damit ist auch $f(t) = \check{\hat{f}}(t)$ fast überall durch diese Werte bestimmt. ∎



HARRY NYQUIST (1889–1976) wurde in Schweden geboren, arbeitete aber ab Anfang der zwanziger Jahre bei den Bell Labaratories; das Bild zeigt ihn um 1960 mit seinen dortigen Kollegen JOHN PIERCE *(links)* und RUDOLF KOMPFNER *(Mitte).* Seine Arbeit von 1924 über die Übertragungsgeschwindigkeit von Telegraphen gilt als eine der Begründungen der Informationstheorie. Den Abtastsatz, den CAUCHY bereits 1841 postuliert hatte, bewies er 1928. Weitere wichtige Arbeiten befassen sich mit der quantitativen Erforschung des thermischen Rauschens und der Stabilität von Verstärkern.

Bei praktischen Anwendungen dieses Satzes wird $f(t)$ im allgemeinen eine reelle Funktion sein; dann verschwindet

$$\hat{f}(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(-\omega)t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)e^{-i\omega t}}\,dt$$

$$= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt} = \overline{\hat{f}(\omega)}$$

genau dann, wenn auch $\hat{f}(\omega)$ verschwindet. Die Überstreichungsstriche stehen hier für die *komplexe Konjugation*

$$\overline{x + iy} = x - iy\,,$$

die reelle Zahlen unverändert läßt.

Daher sollte man in diesem Fall das Intervall, außerhalb dessen $\hat{f}(\omega)$ verschwindet, symmetrisch wählen, also von der Form

$$(-\omega_0,\ \omega_0)\,.$$

Die Zahl ω_0 wird in diesem Zusammenhang meist als *Bandbreite* bezeichnet. In diesem Fall ist $\Omega = 2\omega_0$, zur Rekonstruktion der Funktion f brauchen wir also die Funktionswerte

$$f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) = f\left(\frac{k\pi}{\omega_0}\right) \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Ein Signal der Bandbreite ω_0 muß also mit einer Frequenz von mindestens $2\omega_0$ abgetastet werden, damit man es rekonstruieren kann.

Bekanntestes Beispiel hierfür sind Musik-CDs: Praktisch niemand kann Töne mit Frequenzen von mehr als 20kHz hören; für Aufnahmen auf CD wird 44 100 Mal pro Sekunde der Schalldruck gemessen und gespeichert, für Signale die nicht allzuweit oberhalb von 20kHz abgeschnitten werden, ist also eine perfekte Rekonstruktion möglich.

Auch in der Computergraphik spielt der Satz von NYQUIST eine wichtige Rolle, denn Pixelgraphik ist schließlich nichts anderes als die (zweidimensionale) diskrete Abtastung eines kontinuierlichen Bilds. Falls das Bild zu hochfrequente Anteile enthält, entstehen sogenannte *alias-Effekte,* da das Auge diese Anteile anhand des Pixelbilds als niedrigerfrequente Strukturen mit gleichen Abtastwerten interpretiert. Vor der Abtastung muß das Bild daher tiefpaßgefiltert werden, d.h. diese hochfrequenten Strukturen müssen eliminiert werden. Die Theorie der FOURIER-Transformation zeigt einen Weg, wie dies effizient mit Hilfe der schnell abfallenden Funktion $\frac{\sin ax}{ax}$ durch lokale Rechnungen durchgeführt werden kann, jedoch würde es zu weit führen dies hier noch genauer zu untersuchen.