Wolfgang K. Seiler

Matrizen
und ihre Anwendung
in der Geometrie

Unterlagen zum Schülerseminar über Bildverarbeitung
Universität Mannheim, 31. Oktober – 3. November 2002

WOLFGANG K. SEILER
Mathematisches Institut der
Universität Mannheim
Seminargebäude A5, C 201
68131 Mannheim

Tel. 181-2515
seiler@math.uni-mannheim.de
http://hilbert.math.uni-mannheim.de/∼seiler/

Kapitel 2
Matrizen und ihre Anwendung in der Geometrie

§1: Ebene Drehungen

Auch wenn es eine unübersehbare Fülle von Abbildungen der Ebenen auf sich selbst gibt, reichen für die meisten praktischen Anwendungen doch nur einige wenige Grundtypen. Einen davon wollen wir uns heute genauer anschauen.

Mit die wichtigste Bewegungen in der Ebene ist die Drehung um einen Punkt; wir betrachten zunächst den einfachsten Fall einer Drehung um den Nullpunkt und wollen sehen, was herauskommt, wenn der Punkt (x, y) um den Winkel α um $(0, 0)$ gedreht wird.

Wie wir seit gestern wissen, wird der Umgang mit Winkeln und Winkelfunktionen oft deutlich angenehmer, wenn wir statt mit reellen mit komplexen Zahlen rechnen; das wird sich auch hier so herausstellen. Wir identifizieren den Punkt (x, y) daher mit der komplexen Zahl $z = x + iy$.

Diese kartesische Darstellung ist für unser Problem allerdings nicht optimal: In Polarkoordinaten (r, φ) sehen wir viel besser was passiert: Der Abstand r zum Nullpunkt bleibt unverändert, und zur Winkelkoordinate φ wird der Drehwinkel α addiert. Das Ergebnis einer Drehung von

$$z = x + iy = re^{i\varphi} = r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi$$

um den Nullpunkt mit Drehwinkel α ist also

$$\begin{aligned} re^{i(\varphi+\alpha)} = re^{i\varphi}\cdot e^{i\alpha} = ze^{i\alpha} &= (x+iy)(\cos\alpha + i\sin\alpha) \\ &= (x\cos\alpha - y\sin\alpha) + i\,(x\sin\alpha + y\cos\alpha)\,. \end{aligned}$$

Damit können wir die komplexen Zahlen (für heute) schon wieder vergessen; zurückübersetzt ins Reelle bedeutet dieses Ergebnis, daß die Drehung den Punkt (x, y) abbildet auf den Punkt mit Koordinaten

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \quad\text{und}\quad y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha\,.$$

Die Drehung um den Nullpunkt mit Drehwinkel φ ist also auf dem Niveau der Ortsvektoren die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\quad \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha\\ x\sin\alpha + y\cos\alpha\end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist *linear* im folgenden Sinn: Sind P und Q zwei Punkte mit Ortsvektoren $\binom{x}{y}$ und $\binom{u}{v}$ und sind λ, μ reelle Zahlen, so ist

$$\begin{aligned} \varphi\left(\lambda\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}\right) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda x + \mu u\\ \lambda y + \mu v\end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda x + \mu u)\cos\alpha - (\lambda y + \mu v)\sin\alpha\\ (\lambda x + \mu u)\sin\alpha + (\lambda y + \mu v)\cos\alpha\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x\cos\alpha + \mu u\cos\alpha - \lambda y\sin\alpha + \mu v\sin\alpha\\ \lambda x\sin\alpha + \mu u\sin\alpha + \lambda y + \mu v\cos\alpha\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(x\cos\alpha - y\sin\alpha) + \mu(u\cos\alpha - v\sin\alpha)\\ \lambda(x\sin\alpha + y\cos\alpha) + \mu(u\sin\alpha + v\cos\alpha\end{pmatrix} \\ &= \lambda\begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha\\ x\sin\alpha + y\cos\alpha\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} u\cos\alpha - v\sin\alpha\\ x\sin\alpha + y\cos\alpha\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\varphi\left(\lambda\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}\right) = \lambda\,\varphi\left(\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\right) + \mu\,\varphi\left(\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}\right)\ .$$

Definition: Eine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *linear,* wenn diese Gleichung für alle reellen Zahlen λ, μ und für alle Vektoren $\binom{x}{y}, \binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2$ erfüllt ist.

§2: Geometrische Eigenschaften linearer Abbildungen

Lineare Abbildungen haben eine vom Standpunkt der Geometrie her sehr schöne Eigenschaft: Die Strecke $\overline{PQ}$ wird abgebildet auf die Strecke

$\overline{\varphi(P)\varphi(Q)}$ und die Gerade PQ auf die Gerade $\varphi(P)\varphi(Q)$. Um das einzusehen, betrachten wir die Gerade durch P und Q in Parameterform: Als Ortsvektor können wir beispielsweise den Ortsvektor $\binom{x}{y}$ von P nehmen, als Richtungsvektor $\overrightarrow{PQ}$. Ist $\binom{u}{v}$ der Ortsvektor von Q, so ist

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

die Punkte auf der Geraden haben also die Ortsvektoren

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \lambda\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \lambda\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + (1-\lambda)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bildet diese Punkte ab auf die Punkte mit Ortsvektoren

$$\varphi\left(\lambda\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + (1-\lambda)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \lambda\varphi\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) + (1-\lambda)\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right),$$

das heißt also auf die Punkte der Geraden $\varphi(P)\varphi(Q)$.

Da wir P als Ausgangspunkt und $\overrightarrow{PQ}$ als Richtungsvektor genommen haben, liegt ein solcher Punkt genau dann auf der *Strecke* PQ, wenn sein Parameterwert λ zwischen null und eins liegt, und genau dann auch liegt sein Bild auf der Strecke $\overline{\varphi(P)\varphi(Q)}$.

Somit bilden lineare Abbildungen in der Tat Geraden auf Geraden und Strecken auf Strecken ab, zwei Eigenschaften, die bei der Manipulation von Bildern *fast* immer gewünscht sind. (Ausnahmen sind absichtliche Verzerrungen wie etwa Maßstabsvergrößerungen im Innenstadtbereich bei Stadtplänen oder Spiegelungen an gekrümmten Flächen.)

Eine weniger schöne Eigenschaft linearer Abbildung erkennen wir, wenn wir in der Definition $\lambda = \mu = 0$ setzen: Jede lineare Abbildung φ bildet den Nullpunkt auf sich selbst ab. Bei der oben betrachteten Drehung um den Nullpunkt mußte das natürlich so sein, denn bei jeder Drehung um einen Punkt bleibt (wenn der Drehwinkel kein Vielfaches von 360° ist) genau dieser Drehpunkt fest.

Aus eben diesem Grund kann dann aber keine Drehung um einen anderen Punkt durch eine lineare Abbildung beschrieben werden, und da

auch Verschiebungen keinen Punkt festlassen, können sie genauso wenig durch lineare Abbildungen beschrieben werden.

Der Begriff der linearen Abbildung ist also zu schwach, um eine ganze Reihe gängiger und sogar fundamentaler Abbildungen zu beschreiben; wir müssen ihn irgendwie erweitern, ohne dabei die erwünschte Eigenschaft, daß Strecken auf Strecken und Geraden auf Geraden abgebildet werden, zu verzichten. Wie wir gesehen haben, läuft das darauf hinaus, daß zumindest für reelle Zahlen λ und μ mit $\lambda + \mu = 1$ die Gleichung

$$\varphi\left(\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \lambda\,\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \mu\,\varphi\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)$$

weiterhin erfüllt sein muß. Bevor wir nach Abbildungen suchen, die diese Bedingung erfüllen ohne linear zu sein im Sinne obiger Definition, wollen wir uns lineare Abbildungen zunächst vom rechnerischen Standpunkt aus genauer ansehen; daraus wird sich in natürlicher Weise eine Verallgemeinerung ergeben.

§3: Die Matrix einer linearen Abbildung

Auch rechnerisch hat die Linearität einer Abbildung weitreichende Konsequenzen: Falls beispielsweise nur die beiden Bilder

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

bekannt sind, kennt man die Abbildung bereits vollständig, denn für einen beliebigen Punkt P können wir den Ortsvektor schreiben als

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und damit ist nach Definition der Linearität

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x\,\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + y\,\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}.$$

Wir wollen die vier Zahlen a, b, c, d zusammenfassen zur *Matrix*

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

der sogenannten *Abbildungsmatrix von* φ zur Standardbasis des $\mathbb{R}^2$, und wir definieren ein Produkt aus einer Matrix und einem Vektor durch

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}.$$

Dies mag an dieser Stelle als terminologischer Overkill erscheinen, aber erstens läßt sich dieses Produkt leicht auf höhere Dimensionen verallgemeinern, wo es sowohl beim Schreibaufwand als auch bei der Klarheit und Verständlichkeit mathematischer Ausdrücke zu sehr viel deutlicheren Verbesserungen führt als in diesem recht einfachen Fall, und zweitens liefert es eine anschauliche Merkregel für die Berechnung der Bildpunkte unter φ: Im Schema

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix} \end{array}$$

findet man die i-te Komponente des Ergebnisvektors rechts unten, indem man links in der i-ten Zeile der Matrix und oben im Ausgangsvektor anfängt und die beiden dortstehenden Einträge miteinander multipliziert. Dann geht man in der Matrix nach rechts und im Ausgangsvektor nach unten, multipliziert wieder die beiden Elemente und addiert sie zu dem, was man schon hat. Die Summe kommt in die i-te Komponente des Ergebnisvektors, wobei i hier natürlich nur eins oder zwei sein kann. Diese Regel funktioniert auch in höheren Dimensionen, jedoch wollen wir uns damit in diesem Seminar nicht beschäftigen.

Die lineare Abbildung φ ist durch ihre Abbildungsmatrix A_φ offenbar eindeutig bestimmt, und A_φ wiederum ist eindeutig bestimmt durch die Bilder der beiden Einheitspunkte, so daß diese letztlich die Abbildung bereits vollständig festlegen.

Geometrisch gesehen haben die beiden Einheitspunkte keinerlei Bedeutung, denn sie hängen ja ab von einem willkürlich gewählten Koordinatensystem, das vom Betrachter aus Bequemlichkeits- oder sonstigen Gründen gewählt wurde, das aber nicht durch die Geometrie der Ebene vorgegeben ist. Von daher erscheint fast klar, daß man stattdessen auch zwei beliebige Punkte wählen kann, und das ist auch fast richtig:

Für zwei Punkte P und Q, die nicht auf einer Geraden liegen und beide vom Nullpunkt O verschieden sind, läßt sich jeder zweidimensionale Vektor als Linearkombination

$$\vec{v} = \lambda\,\overline{OP} + \mu\,\overline{OQ}$$

der beiden Ortsvektoren

$$\vec{p} = \overline{OP} \quad \text{und} \quad \vec{q} = \overline{OQ}$$

darstellen; nach Definition einer linearen Abbildung ist also

$$\varphi(\vec{v}) = \lambda\,\varphi(\vec{p}) + \mu\,\varphi(\vec{q})$$

durch die Bildpunkte von P und Q eindeutig festgelegt. (Bei der Anwendung von φ auf Vektoren statt Punkte habe ich, wie das oft üblich ist, Punkte und ihre Ortsvektoren stillschweigend miteinander identifiziert.) Ist

$$\varphi(\vec{p}) = \alpha\,\vec{p} + \beta\,\vec{q} \quad \text{und} \quad \varphi(\vec{q}) = \gamma\,\vec{p} + \delta\,\vec{q},$$

so ist

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{v}) &= \lambda\,\varphi(\vec{p}) + \mu\,\varphi(\vec{q}) = \lambda\,(\alpha\,\vec{p} + \beta\,\vec{q}) + \mu\,(\gamma\,\vec{p} + \delta\,\vec{q}) \\ &= (\alpha\lambda + \mu\gamma)\vec{p} + (\lambda\beta + \mu\delta)\vec{q} \\ &= \lambda'\vec{p} + \mu'\vec{q} \end{aligned}$$

mit

$$\lambda' = \alpha\lambda + \mu\gamma \quad \text{und} \quad \mu' = \lambda\beta + \mu\delta$$

oder kurz

$$\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Auch bezüglich der neuen Basis ist die Abbildung also durch eine Matrix gegeben.

Wenn wir mit den üblichen kartesischen Koordinaten rechnen, zeigt die Rechnung aus §1, daß die Abbildungsmatrix der Drehung um den Winkel α gleich der Matrix

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

ist; diese Matrix bezeichnen wir als *Drehmatrix* zum Drehwinkel α.

§4: Affine Abbildungen

Die Geometrie sagt uns, daß wir als weiteren Abbildungstyp zumindest Verschiebungen brauchen, und die rechnerische Darstellung der linearen Abbildungen legt es nahe, in der Abbildungsvorschrift

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

auch noch die Addition eines konstanten Vektors zuzulassen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{b} \quad \text{mit} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 .$$

Da die Addition des konstanten Vektors geometrisch betrachtet eine Verschiebung beschreibt, definiert beides dasselbe Konzept, das wir als *affine Abbildung* bezeichnen wollen:

Definition: Eine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt *affin,* wenn sie in Koordinaten in der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{b} \quad \text{mit} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

und einer Matrix A geschrieben werden kann.

Damit sind insbesondere alle linearen Abbildungen affin, sie sind gerade diejenigen affinen Abbildungen, für die der Vektor $\vec{b}$ der Nullvektor ist. Da $\vec{b}$ offensichtlich das Bild des Nullvektors ist, können wir auch sagen, daß die linearen Abbildungen genau diejenigen affinen Abbildungen sind, die den Nullpunkt auf sich selbst abbilden. Spätestens daran sieht man, daß der Begriff der linearen Abbildung zwar algebraisch, nicht aber geometrisch ein sinnvolles Konzept ist: Schließlich hat der Nullpunkt genauso wenig geometrische Realität wie der Rest des Koordinatensystems; ein Koordinatensystem (einschließlich seines Nullpunkts) ist etwas, was der Geometrie nachträglich übergestülpt wird, um sie rechnerisch behandeln zu können (wobei die geschickte Wahl eines Koordinatensystems gerade in höheren Dimensionen durchaus den Unterschied zwischen einem praktisch lösbaren und einem praktisch unlösbaren Problem ausmachen kann.)

Genauso sind auch alle Verschiebungen affine Abbildungen: Da die Multiplikation mit der *Einheitsmatrix*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

einen Vektor auf sich selbst abbildet, ist die Verschiebung um einen Vektor $\vec{b}$ einfach die affine Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto E \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{b} .$$

In §2 haben wir gesehen, daß lineare Abbildungen Strecken in Strecken und Geraden in Geraden überführen – eine in der Bildverarbeitung zwar nicht immer, aber doch oft gestellte Forderung an geometrische Transformationen. Sie ist schwächer als die Linearität: Es reicht bereits, daß die Gleichung

$$\varphi\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) = \lambda\, \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \mu\, \varphi\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)$$

für alle Vektoren $\binom{x}{y}$ und $\binom{u}{v}$ sowie alle Paare (λ, μ) von reellen Zahlen mit $\lambda + \mu = 1$ gilt. Bei einer affinen Abbildung φ wie oben ist

$$\begin{aligned} \varphi\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) &= A \left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) + \vec{b} \\ &= \lambda A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \vec{b} . \end{aligned}$$

Falls $\lambda + \mu = 1$ ist, können wir dies auch schreiben als

$$\begin{aligned} &\lambda A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \lambda \vec{b} + \mu \vec{b} \\ &= \lambda \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{b} \right) + \mu \left(A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \vec{b} \right) \\ &= \lambda\, \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \mu\, \varphi\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) , \end{aligned}$$

affine Abbildungen haben also die gewünschte Eigenschaft.

§5: Beispiele affiner Abbildungen

Ein wesentliches Problem bei linearen Abbildungen war, daß wir damit nur Drehungen um den Nullpunkt beschreiben konnten, nicht aber Drehungen um einen anderen Punkt P. Wir wollen uns überlegen, daß auch solche Drehungen affin sind.

Dazu verwenden wir eine in der Mathematik sehr beliebte, weil oft erfolgreiche, Taktik: Wir führen das Problem zurück auf ein bereits gelöstes.

Der Herd in der Teeküche eines Instituts hat zwei Platten. Auf der linken steht ein Kessel mit Wasser. Das Problem des Teekochens ist einfach lösbar: Man heizt die linke Kochplatte, bis das Wasser kocht, gießt es dann über den Tee und so weiter. Was macht ein Mathematiker, wenn der Topf eines Tages auf der rechten Platte steht? Er stellt ihn auf die linke und hat so das Problem auf ein bereits gelöstes zurückgeführt.

Nehmen wir an, anstelle des Kessels stünde eine Stielpfanne auf der Kochplatte, wobei der Mittelpunkt der linken Kochplatte der Nullpunkt sei, der der rechten der Punkt, um den wir drehen wollen. Aus §1 wissen wir, wie man Töpfe auf der linken Kochplatte dreht. Steht der Topf auf der rechten Platte, verschieben wir ihn einfach auf die linke, drehen ihn dort um den gewünschten Winkel und schieben ihn wieder zurück auf die rechte Kochplatte.

Rechnerisch ist das problemlos nachzuvollziehen: Wenn wir um den Punkt P drehen wollen, verschieben wir zunächst um den Vektor $-\overrightarrow{OP}$ auf die linke Kochplatte. Dort drehen wir um den Winkel α, indem wir mit der Drehmatrix

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

multiplizieren. Schließlich verschieben wir mit dem Vektor $\overrightarrow{OP}$ wieder zurück auf die rechte Kochplatte. Insgesamt ist also

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = D_\alpha\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \overrightarrow{OP}\right) + \overrightarrow{OP} = D_\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \overrightarrow{OP} - D_\alpha\overrightarrow{OP}\,,$$

und das ist in der Tat eine affine Abbildung.

Will man nicht nur das Ergebnis einer Bewegung sehen, sondern die Bewegung selbst, muß man die Parameter variieren lassen; abstrakt-mathematisch betrachtet heißt dies, daß sie sich in einem Intervall bewegen, in der konkreten Realisierung auf einem Computer nimmt man eine endliche Anzahl von Zwischenwerten, die oft ein Kompromis ist zwischen den Fähigkeiten des Rechners und dem eigentlich erwünschten Ergebnis.

Betrachten wir etwa das Quadrat mit Ecken $(\pm1,\pm1)$. Da eine affine Abbildung φ eine Strecke $\overline{PQ}$ abbildet auf die Strecke $\overline{\varphi(P)\varphi(Q)}$, ist das Bild des Quadrats unter φ das Viereck mit Ecken $\varphi\big((\pm1,\pm1)\big)$. (Auch wenn wir keine Zeit für konkrete Beispiele haben: Eine allgemeine affine oder auch lineare Abbildung bildet ein Quadrat meist nicht mehr auf ein Quadrat ab: Da man schon bei einer linearen Abbildung die Bilder der beiden Einheitspunkte frei wählen kann, sollte niemand große Schwierigkeiten haben, ein Quadrat auf ein nichtquadratisches Rechteck oder auch ein allgemeines Parallelogramm abzubilden. Wenn wir uns auf die hier konkret behandelten Drehungen und Verschiebungen beschränken, ist das Bild aber natürlich wieder ein Quadrat.)

Die Rotation um den Nullpunkt ist problemlos: Wir lassen α kontinuierlich ansteigen und zeichnen jeweils das Quadrat mit Ecken $D_\alpha\binom{\pm1}{\pm1}$. Für eine volle Umdrehung muß man α von null bis 2π laufen lassen, für eine sich wiederholende Animation genügt allerdings bereits der Bereich bis $\pi/2$, da ein um 90° gedrehtes (homogenes) Quadrat ununerscheidbar vom Original ist.

Eine andere Art von Rotation erhalten wir, wenn wir für A die Einheitsmatrix nehmen und nur verschieben, dabei aber den Verschiebungsvektor rotieren lassen: Wir betrachten also für einen festen Vektor $\vec b$ die Verschiebungen um $D_\alpha\vec b$ für variierendes α.

Für die Drehung um einen beliebigen Punkt P schließlich wenden wir die oben hergeleitete Formel an für variierendes α.

Ausprobieren kann man das mit dem Maple-*worksheet* zu diesem Vortrag, das wie auch die Postskriptdateien zu den Vortragsausarbeitungen und die anderen *worksheets* unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/~seiler/BV/`

zu finden ist.