Universität Mannheim

Lehrstuhl VI für Mathematik

Wolfgang K. Seiler

Im Herbstsemester 2017 werde ich lesen

Differentialalgebra

Ort und Zeit: Montag $13^{45} - 15^{15}$, C 015

Ableitungen sind zwar über Grenzprozesse definiert, werden aber selten über diese Definition berechnet: Oft reichen Regeln wie die Linearität der Ableitung und die LEIBNIZsche Produktregel aus, um die Ableitung zu bestimmen. Diese Situation formalisiert die Differentialalgebra: Sie betrachtet Körper K, deren Elemente als Funktionen aufgefaßt werden können, beispielsweise den Körper $\mathbb{R}(X)$ aller rationaler Funktionen mit reellen Koeffizienten. Dazu betrachtet sie noch eine Abbildung $D: K \to K$, die Bedingungen wie $D(f+g) = D(f)+D(g)$ und $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ erfüllen muß. Damit lassen sich weite Teile der Differentialrechnung rekonstruieren.

Auch Differentialgleichungen lassen sich in solchen Differentialkörpern aufstellen; beispielsweise kann man nach einem $y \in K$ suchen mit $D(y) + fy = g$ für vorgegebenes $f, g \in K$. Falls es kein solches $y \in K$ gibt, kann man den Körper K erweitern zu einem größeren Körper L: Genau wie man die reellen Zahlen zu den komplexen erweitert um die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ zu lösen, kann man den Körper der rationalen Funktionen über $\mathbb{R}$ erweitern durch Hinzufügen der Logarithmusfunktion, um die Gleichung $D(y) = 1/x$ zu lösen. Interessant ist dabei vor allem die Frage, ob man für eine gegebene Differentialgleichung eine Körpererweiterung finden kann, für die man nur elementare Funktionen wie Exponentialfunktionen und Logarithmen dazunehmen muß, um eine Lösung zu finden: In diesem Fall läßt sich die Lösung der Differentialgleichung durch elementare Funktionen ausdrücken. Die Differential-GALOIS-Theorie erlaubt es in vielen Fällen, diese Frage zu beantworten.

Hörerkreis: Die Vorlesung wendet sich vor allem an Masterstudenten der Wirtschaftsmathematik, kann aber bei entsprechendem Interesse auch von Bachelor- und Lehramts- und Nebenfachstudenten gehört werden. Die Vorlesung *Algebra* wird nicht vorausgesetzt, kann aber hilfreich sein wegen der Analogie zur (nicht benötigten) klassischen GALOIS-Theorie.

Literaturauswahl:

IRVING KAPLANSKY: An introduction to differential algebra, Hermann, Paris, 1957

JOSEPH RITT: Differential algebra, *Dover,* 1966 *(auch elektronisch verfügbar)*

E.R. KOLCHIN: Differential algebra and algebraic groups, *Academic Press*, 1973 *(auch elektronisch verfügbar)*

Seminargebäude A5
D - 68131 Mannheim
Tel.: 0621 / 181 - 2515
Fax: 0621 / 181 - 2461
seiler@math.uni-mannheim.de
http://hilbert.math.uni-mannheim.de/∼seiler