

5. Mai 2024

9. Übungsblatt Algebraische Statistik

Aufgabe 1: (10 Punkte)

X und Y seien zwei Zufallsvariablen, die jeweils Werte in der Menge $\{1, 2\}$ annehmen. Für einen Test der Nullhypothese, wonach X und Y voneinander unabhängig sind, werden zehn Wertepaare (i, j) erzeugt, die sich wie folgt auf die vier Möglichkeiten verteilen:

	$X = 1$	$X = 2$
$Y = 1$	1	3
$Y = 2$	2	4

- Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeiten $p_{ij} = p(X = i, Y = j)$ anhand dieser Tafel unter Annahme der Nullhypothese!
- Welche weiteren Vierfeldertafeln mit den gleichen Werten von u_{1+}, u_{2+}, u_{+1} und u_{+2} gibt es?
- Führen Sie für jede dieser Tafeln einen χ^2 -Test durch, und schätzen Sie über die χ^2 -Verteilung die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Nullhypothese falsch ist!
- Berechnen Sie dieselben Wahrscheinlichkeiten über FISHERS exakten Test!

Aufgabe 2: (2 Punkte)

$\Gamma \subset \mathbb{Z}^n$ sei ein Gitter mit Basis b_1, \dots, b_r . Zeigen Sie, daß für alle $c_{ij} \in \mathbb{Z}$ auch die Vektoren

$b_1 + c_{12}b_2 + \dots + c_{1r}b_r, \quad b_2 + c_{23}b_3 + \dots + c_{2r}b_r, \quad \dots, \quad b_{r-1} + c_{r-1,r}b_r$ und b_r
eine Basis von Γ bilden!

Aufgabe 3: (3 Punkte)

- Bestimmen Sie alle Vektoren der Länge höchstens drei im Gitter $\Gamma = \mathbb{Z} \binom{28}{6} \oplus \mathbb{Z} \binom{13}{3}$!
- Welche Fläche hat das von den beiden Basisvektoren aufgespannte Parallelogramm?
- Finden Sie eine Basis von Γ mit möglichst kurzen Vektoren!
- Zeigen Sie, daß Γ keine Basis aus zwei aufeinander senkrecht stehenden Vektoren hat!

Aufgabe 4: (5 Punkte)

- Finden Sie Basen aus möglichst kurzen Vektoren für die Gitter

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \mid x \equiv y \pmod{2} \right\} \quad \text{und} \quad \Gamma_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \mid x \equiv y \pmod{3} \right\}$$

- Zeigen Sie, daß $\Gamma_3 = \{u \in \mathbb{Z}^4 \mid 3u_1 + 3u_2 + 4u_3 + 5u_4 = 0\}$ ein Gitter ist mit den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

als Basis!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 8. Mai 2024, um 15.30 Uhr