

21. April 2024

8. Übungsblatt Algebraische Statistik

Aufgabe 1: (2 Punkte)

- Zeigen Sie, daß der Fächer eines eindimensionalen Designs stets minimal ist!
- Warum ist das kein Widerspruch zu dem Satz, daß der Fächer eines „allgemeinen“ Designs maximal ist?

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Im Design $D = \{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\}$ wird eine Fraktion \mathcal{F} definiert durch das Verschwinden des Polynoms $g = X^3 + X^2 + Y$.

- Aus welchen Punkten besteht \mathcal{F} ?
- Finden Sie ein Erzeugendensystem von $I(D)$, das bezüglich jeder Monomordnung von $\mathbb{Q}[X, Y]$ eine GRÖBNER-Basis von $I(D)$ ist!
- Welche vollständigen linearen polynomialen Modelle können auf Grund von D eindeutig bestimmt werden?
- Gibt es auch ein entsprechendes Erzeugendensystem von $I(\mathcal{F})$, das bezüglich jeder Monomordnung eine GRÖBNER-Basis ist?
- Welche vollständigen linearen polynomialen Modelle können auf Grund von \mathcal{F} eindeutig bestimmt werden?
- Bestimmen Sie die Mengen $\text{Min}(\text{Est}_\tau(\mathcal{F}))$ und $\text{CutOut}(\text{Est}_\tau(\mathcal{F}))$

Aufgabe 3: (3 Punkte)

- Welche Größe hat das kleinste volle faktorielle Design D , für das

$$\mathcal{O} = \{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, x^3y\}$$

in $\text{Est}(D)$ liegt?

- Bestimmen Sie die Mengen $\text{Min}(\mathcal{O})$ und $\text{Cutout}(\mathcal{O})$!

Aufgabe 4: (7 Punkte)

Wir gehen aus vom Design $D = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$.

- Bestimmen Sie eine GRÖBNER-Basis von $I(D)$ bezüglich jeder Monomordnung τ sowie die zugehörige Menge $\text{Est}_\tau(D)$!
- Auf Grund welcher Fraktionen \mathcal{F} von D läßt sich das vollständige lineare Modell $a+bX+cY$ eindeutig identifizieren?
- Bestimmen Sie die Mengen $\text{Min}(\{1, X, Y\})$ und $\text{CutOut}(\{1, X, Y\})$!
- Bestimmen Sie für eine der in $b)$ gefundenen Fraktionen die Polynome $f \in I(\mathcal{F})$, die sich als Summe eines Monoms aus $\text{CutOut}(\{1, X, Y\})$ und einer Linearkombination von Polynomen aus $\{1, X, Y\}$ darstellen lassen!
- Geben Sie für diese Fraktion \mathcal{F} eine GRÖBNER-Basis von $I(\mathcal{F})$ an!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 24. April 2024, um 15.30 Uhr