WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

B6, B4.08

14. April 2024

7. Übungsblatt Algebraische Statistik

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Eine Größe y nimmt auf den Punkten eines Designs $D \subset \mathbb{Z}^2$ die folgenden Werte an:

$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$
1	5	15	3	10	22	5	15	30

Bestimmen Sie für das polynomiale Modell mit Träger $\{X, Y, XY\}$ die optimalen Parameter!

b) Ist dieses Modell vollständig?

Aufgabe 2: *(2 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Ist $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Hauptideal, so ist für jede Monomordnung auch $FM(I)$ ein Hauptideal!

b) Konkret sei $I = (X^3 + XY^2 + X^2Y^2 + X^2Y + Y^3)$. Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für das Ideal $FM(I)$, und geben Sie jeweils eine Monomordnung an, die zu dieser Möglichkeit führt!

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) Finden Sie für $D = \{(3,7),\ (2,5),\ (4,6)\}$ ein Erzeugendensystem des Ideals $I(D)$!

b) Bestimmen Sie die Mengen $\mathrm{Est}_\tau(D)$ für die lexikographische sowie die graduierte lexikographische Ordnung jeweils für die Fälle $X > Y$ und $Y > X$!

c) Gibt es außer den gefundenen Est-Mengen noch weitere Ordnungsideale, die aus drei Monomen bestehen?

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

Das Design D bestehe aus den Punkten $(-1,-1), (-1,0), (-1,1), (1,-1)$ und $(1,1)$.

a) Bestimmen Sie alle Ordnungsideale, die zu einem auf Grund von D schätzbaren Modell führen!

b) Ist das Modell $\theta_1 X + \theta_2 Y + \theta_3 X^2 + \theta_4 XY + \theta_5 Y^2$ auf Grund von D schätzbar?

c) Zeigen Sie, daß D die Nullstellenmenge des von den Polynomen $f_1 = X^2 - 1$, $f_2 = Y^3 - Y$ und $f_3 = (X+1)(Y^2-1)$ erzeugten Ideals I ist!

d) Zeigen Sie, daß f_1, f_2, f_3 bezüglich jeder Monomordnung eine GRÖBNER-Basis von I bilden!

e) Folgern Sie, daß $I = \sqrt{I}$ und somit I das Designideal von D ist!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 17. April 2024, um 15.30 Uhr