WOLFGANG K. SEILER
*Tel.* 2515

B6, B4.08

*2. April 2024*

# 6. Übungsblatt Algebraische Statistik

**Aufgabe 1:** *(4 Punkte)*
Zu drei Merkmalen, von denen jeweils drei Stufen betrachtet werden, sollen alle möglichen Merkmalskombinationen untersucht werden.

*a)* Geben Sie ein entsprechendes Design $D$ an und bestimmen Sie dessen Ideal

$$I(D) = \left\{ f \in \mathbb{Q}[X,Y,Z] \;\middle|\; f(x,y,z) = 0 \ \forall (x,y,z) \in D \right\}!$$

*b)* Bestimmen Sie einen möglichst einfachen Vektorraum von Polynomen derart, daß jede Äquivalenzklasse modulo $I(D)$ genau ein Polynom aus diesem Raum enthält!

**Aufgabe 2:** *(4 Punkte)*
Es wird vermutet, daß eine Größe $z$ gemäß $z = a + bx + cy + dxy$ von zwei weiteren Größen $x$ und $y$ abhängt. Empirisch werden die folgenden Kombination von $x, y, z$ beobachtet:

| $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | −1 | 1 |
| −1 | 1 | −1 |
| −1 | −1 | 2 |

Bestimmen Sie die dazu passenden Parameterwerte $a, b, c, d$!

**Aufgabe 3:** *(5 Punkte)*

*a)* Bestimmen Sie für das Design $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x,y \in \{-1,0,1\} \right\}$ alle linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die in jedem Punkt von $D$ einen anderen Wert annehmen!

*b)* Bestimmen Sie für das Design $D$ aus den vier Punkten $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (0,2)$, $P_3 = (1,1)$ und $P_4 = (1,3)$ ein Polynom aus $\mathbb{R}[X,Y]$, das für den Punkt $P_i$ dem Wert $i$ annimmt!

**Aufgabe 4:** *(7 Punkte)*

*a)* Bestimmen Sie das Design zum Ideal $I = (X^2 - X, Y^2 - Y, XY)$ aus $\mathbb{R}[X,Y]$!

*b)* Zeigen Sie, daß die drei angegebenen Polynome bezüglich jeder Monomordnung auf $\mathbb{R}[X,Y]$ eine GRÖBNER-Basis bilden!

*c)* Bestimmen Sie dazu die Standardmonome für die verschiedenen Monomordnungen!

*d)* Wir betrachten als statistisches Modell eine beliebige Linearkombination von Standardmonomen. Geben Sie explizit an, wie man aus den Werten dieses Polynoms in den Designpunkten die Modellparameter schätzen kann!

**Abgabe** bis zum Mittwoch, dem 10. April 2024, um 15.30 Uhr