WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

B6, B4.08

15. März 2024

5. Übungsblatt Algebraische Statistik

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Ein Polynom $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ heißt *irreduzibel,* wenn es sich nicht als Produkt $f = gh$ zweier Polynome positiven Grades schreiben läßt. Zeigen Sie, daß das von einem irreduziblen Polynom erzeugte Hauptideal (f) ein Radikalideal ist! Sie können dabei verwenden, daß es zu zwei Polynome mit Koeffizienten aus einem Körper stets einen größten gemeinsamen Teiler gibt.

b) Zeigen Sie, daß für jedes Ideal I gilt: $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$!

c) I sei das vom Polynom $(X-1)^3(X-2)^7(X-3)^{17}$ erzeugte Ideal von $\mathbb{Q}[X]$. Bestimmen Sie ein Polynom f, so daß $\sqrt{I} = (f)$ ist!

d) k sei ein beliebiger Körper, d, e seien natürliche Zahlen, und I sei das von X^d und Y^e erzeugte Ideal in $k[X, Y]$. Was ist $\sqrt{I}$?

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

K sei ein (überabzählbarer) algebraisch abgeschlossener Körper und I ein Ideal im Polynomring $K[X_1, \dots, X_n]$. Folgern Sie aus dem HILBERTschen Nullstellensatz, daß $\sqrt{I}$ der Durchschnitt aller maximaler Ideale ist, die I enthalten!

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*

R sei ein beliebiger (kommutativer) Ring.

a) Zeigen Sie: Alle Primideale von R sind Radikalideale.

b) Ist I ein beliebiges Ideal, so liegt $\sqrt{I}$ im Durchschnitt aller Primideale von R, die I enthalten. *(Tatsächlich kann man zeigen, daß $\sqrt{I}$ sogar gleich diesem Durchschnitt ist.)*

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}[X, Y]/(Y^2 - X) \cong \mathbb{Q}[X] \oplus \mathbb{Q}[X]\,Y$!

b) Wie wird in $\mathbb{Q}[X] \oplus \mathbb{Q}[X]\,Y$ das Produkt zweier Elemente $f + gY$ und $p + qY$ mit f, g, p, q aus $\mathbb{Q}[X]$ berechnet?

Aufgabe 5: *(3 Punkte)*

I sei ein Ideal von $k[X_1, \dots, X_n]$, dessen GRÖBNER-Basis G bezüglich der lexikographischen Ordnung für jedes i ein Polynom enthalte, dessen führendes Monom eine Potenz von X_i ist. Zeigen Sie, daß $V(I)$ endlich ist!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 20. März 2024, um 15.30 Uhr