Wolfgang K. Seiler B6, B4.08
Tel. 2515

8. März 2024

4. Übungsblatt Algebraische Statistik

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) I sei ein Ideal in $k[X_1,\dots,X_n]$ und J sei das Eliminationsideal $I \cap k[X_{\ell+1},\dots,X_n]$. Zeigen Sie, daß das Bild von $V_K(I)$ unter der Projektion von K^n nach $K^{n-\ell}$ in $V_K(J)$ liegt!

b) Berechnen Sie für das Ideal $I = (XY-1)$ in $\mathbb{Q}[X,Y]$ das Eliminationsideal $J = I \cap \mathbb{Q}[X]$ und überprüfen Sie, ob $V(J)$ gleich dem Bild von $V(I)$ unter der Projektion $\mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ ist!

c) Bestimmen Sie für das Ideal $I = (X^2 - Y, X^2 - Z)$ in $\mathbb{R}[X,Y,Z]$ eine Basis des Ideals $J = I \cap \mathbb{R}[Y,Z]$!

d) Für welche Punkte $(b,c) \in V(J) \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt es Punkte $(a,b,c) \in V(I) \subseteq \mathbb{R}^3$?

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

Lösen Sie (irgendwie) das Gleichungssystem

$$2x + 3z^2 - 9z = 4, \quad y - 2z^2 + 3z = 1, \quad z^3 - 3z^2 + 2z = 0\,!$$

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

Finden Sie (irgendwie) Ideale in $\mathbb{R}[X,Y]$, deren Nullstellenmengen genau aus den folgenden Punkten bestehen:

a) $(3,5)$

b) $(\pm 1, \pm 1)$

c) $(1,4)$, $(4,7)$ und $(2,5)$

d) $(1,4)$, $(4,1)$, $(4,7)$, $(7,4)$, $(2,5)$ und $(5,2)$

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) Finden Sie ein Ideal I in $\mathbb{Q}[X,Y]$ mit $V(I) = \{(1,2),\ (1,3),\ (2,5),\ (2,7),\ (3,2),\ (3,5)\}$!

b) Berechnen Sie die Durchschnitte $I \cap \mathbb{Q}[X]$ und $I \cap \mathbb{Q}[Y]$ sowie deren Nullstellenmengen!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 13. März 2024, um 15.30 Uhr