Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.08

1. März 2024

3. Übungsblatt Algebraische Statistik

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

Berechnen Sie bezüglich der lexikographischen Ordnung auf $k[X, Y, Z]$ die folgenden S-Polynome:

a) $S(X, YZ)$

b) $S(X^2 + Y^2 + Z^2, 2Y^3 + Z^2)$

c) $S(X^3 + 2X^2 + X + 1, Y^3 + 3Y + 2)$

d) $S(X^2 + 3X + 5, X^3 + 2X^2 + 7)$

e) $S(X + Y + 1, Y + 1)$

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

a) $\ell^{(j)}(X_1, \dots, X_n) = a_{j1}X_1 + \cdots + a_{jn}X_n + b_j \in k[X_1, \dots, X_n]$ seien lineare Polynome, $j = 1, \dots, m$. Wann bilden sie bezüglich der lexikiographischen Ordnung eine Gröbner-Basis des von ihnen erzeugten Ideals I?

b) Eine Gröbner-Basis eines Ideals heißt *minimal,* falls alle ihrer Elemente den führenden Koeffizienten eins haben und kein führendes Monom eines ihrer Elemente das eines anderen teilt. Sie heißt *reduziert,* wenn zusätzlich kein führendes Monom eines Elements *irgendein* Monom eines anderen teilt. Wann bilden $\ell^{(1)}, \dots, \ell^{(j)}$ eine minimale *bzw.* reduzierte Gröbner-Basis von I??

c) Zeigen Sie: Wenn $\ell^{(i)}$ und $\ell^{(j)}$ das gleiche führende Monom haben, erzeugen $\ell^{(i)}$ und $S(\ell^{(i)}, \ell^{(j)})$ das gleiche Ideal wie $\ell^{(i)}$ und $\ell^{(j)}$.

d) Finden Sie zwei lineare Polynome $\ell^{(1)}$ und $\ell^{(2)}$ derart, daß $\ell^{(1)}$ und $S(\ell^{(1)}, \ell^{(2)})$ nicht das gleiche Ideal wie $\ell^{(1)}$ und $\ell^{(2)}$ erzeugen!

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*

$f_1, \dots, f_r$ seien Polynome aus $k[X]$. Zeigen Sie, daß die reduzierte Gröbner-Basis des von $f_1, \dots, f_r$ erzeugten Ideals nur aus dem ggT dieser Polynome besteht! (Wir nehmen von den vielen größten gemeinsamen Teilern einer Menge von Polynomen stets den mit führendem Koeffizienten eins.)

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie bezüglich der lexikographischen Ordnung eine Gröbner-Basis für das Ideal $I = (XY - 1, XZ - 1)$ in $k[X, Y, Z]$!

b) Bestimmen Sie die reduzierte Gröbner-Basis dazu!

c) Finden Sie eine Monomordnung, bezüglich derer $\{XY - 1, Y - Z\}$ die reduzierte Gröbner-Basis von I ist!

d) Zeigen Sie, daß $V(I)$ eine Hyperbel ist!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 6. März 2024, um 15.30 Uhr