

21. Februar 2024

## 2. Übungsblatt Algebraische Statistik

### Aufgabe 1: (5 Punkte)

- Zeigen Sie, daß man in der Definition einer Monomordnung die dritte Bedingung, die Wohlordnungseigenschaft also, ersetzen kann durch die Bedingung, daß  $(0, \dots, 0) \in \mathbb{N}_0^n$  kleiner sein muß als jedes andere Element! (*Hinweis:* Verwenden Sie das Lemma von DICKSON in der folgenden Form: Ist  $A$  eine Menge von Monomen, so gibt es eine endliche Teilmenge  $A' \subseteq A$ , so daß  $(A) = (A')$  ist.)
- Zeigen Sie: Diese Bedingung ist auch äquivalent dazu, daß jeder der  $n$  Koordinateneinheitsvektor  $(0, \dots, 1, \dots, 0)$  größer sein muß als  $(0, \dots, 0)$ !
- Geben Sie ein Beispiel einer Ordnungsrelation auf  $\mathbb{N}_0^n$  an, die zwar die ersten beiden Forderungen an eine Monomordnung erfüllt, nicht aber die dritte!

### Aufgabe 2: (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß ein Tupel  $e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{N}_0^n$  bezüglich der graduierten lexikographischen Ordnung genau dann kleiner ist als  $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{N}_0^n$ , wenn

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} <_{\text{lex}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

gilt, wobei  $<_{\text{lex}}$  die lexikographische Ordnung auf  $\mathbb{N}_0^n$  (in Spaltenschreibweise) bezeichnet!

### Aufgabe 3: (5 Punkte)

Analog zur lexikographischen Ordnung auf  $\mathbb{N}_0^n$  können wir auch auf  $\mathbb{Z}^n$  eine Relation  $<_{\text{lex}}$  definieren durch die Festlegung  $(w_1, \dots, w_n) <_{\text{lex}} (z_1, \dots, z_n)$  genau dann wenn die erste von Null verschiedene Differenz  $w_i - z_i$  negativ ist.

- $A$  sei eine nichtsinguläre  $n \times n$ -Matrix mit rationalen Zahlen als Einträgen; außerdem sei in jeder Spalte der erste von Null verschiedene Eintrag positiv. Zeigen Sie, daß durch  $x <_A y$  genau dann, wenn  $Ax <_{\text{lex}} Ay$  eine Monomordnung auf  $\mathbb{N}_0^n$  definiert wird! (Die Elemente von  $\mathbb{N}_0^n$  werden auch hier als Spaltenvektoren geschrieben.)  
*Hinweis:* Verwenden Sie Aufgabe 1!
- Welche Probleme gibt es, wenn die Matrix singulär ist?
- Welche Probleme gibt es, wenn der erste nichtverschwindende Eintrag einer der Spalten negativ ist?

### Aufgabe 4: (6 Punkte)

- Wenden Sie den Divisionsalgorithmus an auf die Division von  $f = X^3Y^2 + XY^4 + Y^5$  durch  $f_1 = XY - 2$  und  $f_2 = Y^3 - 1$  bezüglich der lexikographischen Ordnung!
- Dividieren Sie  $f$  durch  $f_2$  und  $f_1$  bezüglich der graduiert-lexikographischen Ordnung!