

16. Februar 2024

## 1. Übungsblatt Algebraische Statistik

### Aufgabe 1: (6 Punkte)

- Ein Design  $D \subset \mathbb{R}^2$  ist gegeben als Nullstellenmenge der beiden Polynome  $X^2 - Y^2$  und  $X^2 - 1$ . Geben Sie seine Punkte explizit an!
- Das allgemeinste quadratische Modell für zwei Eingangsgrößen ist gegeben durch das Polynom  $Q(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2 + dX + eY + f$ . Zeigen Sie, daß es zur Bestimmung der Koeffizienten dieses Modells nicht ausreicht, nur die Werte an den Punkten aus  $D$  zu kennen!
- Bestimmen Sie alle quadratischen Modelle, deren Koeffizienten mittels der Funktionswerte auf  $D$  bestimmt werden können!
- Welche dieser Modelle gehören zu einem Ordnungsideal?

### Aufgabe 2: (6 Punkte)

- Finden Sie (durch Probieren) ein System von Polynomgleichungen mit Lösungsmenge  $D = \{(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 1), (-1, -1)\}$ !
- Lassen sich die Parameter des allgemeinen quadratischen Modells bestimmen, wenn alle Funktionswerte auf  $D$  bekannt sind?
- Bestimmen Sie alle quadratischen Modelle, die mittels der Funktionswerte auf  $D$  eindeutig identifiziert werden können!
- Welche davon gehören zu Ordnungsidealen?

### Aufgabe 3: (3 Punkte)

Zeigen Sie:

- Jedes Ideal  $I$  eines Rings  $R$  ist bezüglich der Addition eine Untergruppe von  $R$ .
- Der Durchschnitt beliebig vieler Ideale eines Rings ist wieder ein Ideal.!
- Gilt Entsprechendes auch für die Vereinigung?

### Aufgabe 4: (5 Punkte)

Welche der folgenden Teilmengen des Polynomrings  $\mathbb{R}[X, Y]$  sind Ideale?

$$\begin{aligned} M_1 &= \mathbb{R}, & M_2 &= \mathbb{Q}[X, Y], & M_3 &= \mathbb{R}[X], & M_4 &= \mathbb{R}[X^2, Y^2], \\ M_5 &= \{f \in \mathbb{R}[X, Y] \mid f(3, 5) = 0\}, & M_6 &= \{f \in \mathbb{R}[X, Y] \mid f(3, 5) = 1\}, \\ M_7 &= \{f \in \mathbb{R}[X, Y] \mid \text{Die Summe aller Koeffizienten von } f \text{ ist } 0\}, \\ M_8 &= \{f \in \mathbb{R}[X, Y] \mid f \text{ enthält nur Monome vom Grad mindestens } 5\}, \\ M_9 &= \{f \in \mathbb{R}[X, Y] \mid f \text{ enthält nur Monome vom Grad höchstens } 5\} \end{aligned}$$

**Abgabe** bis zum Mittwoch, dem 21. Februar 2024, um 15.30 Uhr