

10. Übungsblatt Algebraische Statistik

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Perioden und die FOURIER-Reihen der folgenden Funktionen:

- a) $f(x) = \sin^4 x$
- b) $f(x) = x - [x]$, wobei die GAUSS-Klammer $[x]$ für die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x steht.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

- a) Bestimmen Sie eine Basis des von $1, \cos kx$ und $\sin kx$ für $k = 1, 2, 3, 4$ aufgespannten Untervektorraum des Raums aller stetiger Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die nur aus Monomen in $\cos x$ und $\sin x$ besteht, und geben Sie explizit an, wie sich die Funktionen $\cos kx$ und $\sin kx$ in der neuen Basis darstellen lassen!
- b) Zeigen Sie: Der von $1, \cos^k x$ und $\sin^k x$ für $k \leq n$ aufgespannte Untervektorraum des Raums aller stetiger Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat höchstens die Dimension $1 + n + \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Wir betrachten das FOURIER-Modell mit der Frequenzmenge $A^+ = \{(\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})\}$ und das Design $D = \{(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)\}$.

- a) Welchen Rang r hat die Designmatrix?
- b) Bestimmen Sie alle Untermodelle mit r Parametern, die sich für Funktionen $D \rightarrow \mathbb{R}$ schätzen lassen!
- c) Bestimmen Sie für diese Modelle die optimalen Parameter zur Beschreibung jener Funktion, die dem i -ten Designpunkt (in obiger Reihenfolge) den Wert i zuordnet!