

10. April 2016

## 5. Übungsblatt Algebraische Statistik

### Aufgabe 1: (12 Punkte)

Das Design  $D \subset \mathbb{Q}^2$  sei gegeben als die gemeinsame Nullstellenmenge der drei Polynome  $f_1 = X^2 + Y^2 - 1$ ,  $f_2 = X^3 - X$  und  $f_3 = Y^3 - Y$ .

- Geben Sie  $D$  als Punktmenge explizit an!
- Zeigen Sie, daß  $\{f_1, f_2, f_3\}$  bezüglich keiner Monomordnung eine GRÖBNER-Basis des Ideals  $I = (f_1, f_2, f_3)$  sein kann!
- Bezüglich der lexikographischen Ordnung mit  $X$  von  $Y$  bilden  $f_1, f_3$  und  $f_4 = XY$  eine GRÖBNER-Basis von  $I$ . (Das muß nicht nachgewiesen werden.) Geben Sie ein Erzeugendensystem des Ideals der führenden Monome an, und bestimmen Sie die Est-Menge bezüglich dieser Ordnung!
- Berechnen Sie die zugehörige Design-Matrix und geben Sie an, wie man das Modell berechnet, das am  $i$ -ten Designpunkt den Wert  $y_i$  annimmt! (Es genügt, ein lineares Gleichungssystem für die Parameter aufzustellen.)
- Welche GRÖBNER-Basis hat  $I$  bezüglich der lexikographischen Ordnung, bei der  $Y$  von  $X$  kommt?
- Geben Sie auch hierfür ein Erzeugendensystem des Ideals der führenden Monome an, und bestimmen Sie die Est-Menge bezüglich dieser Ordnung!
- Hat  $I$  bezüglich der beiden Monomordnung das gleiche Ideal der führenden Monome?

### Aufgabe 2: (8 Punkte)

Wir betrachten das Design  $D = \{-1, 0, 1\}^3 \subset \mathbb{Q}^3$ .

- Finden Sie ein Erzeugendensystem des Ideals  $I(D)$ , das bezüglich jeder Monomordnung von  $\mathbb{Q}[X, Y, Z]$  eine GRÖBNER-Basis ist!
- Wie viele Elemente hat  $D$ ?
- Bestimmen Sie die Est-Menge zur GRÖBNER-Basis aus  $a)$ !
- Finden Sie ein Ordnungsideal, das genauso viele Elemente wie  $D$  hat, aber nicht im Fächer liegt!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 14. April 2016, um 15.25 Uhr