WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515 A5, C201

31. März 2016

4. Übungsblatt Algebraische Statistik

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie bezüglich der lexikographischen Ordnung eine GRÖBNER-Basis für das Ideal $I = (X^2 - Y, X^2 - Z)$ in $\mathbb{R}[X, Y, Z]$!

b) Geben Sie eine Basis des Ideals $J = I \cap \mathbb{R}[Y, Z]$ in $\mathbb{R}[Y, Z]$ an!

c) Für welche Punkte $(b, c) \in V(J) \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt es Punkte $(a, b, c) \in V(I) \subseteq \mathbb{R}^3$?

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

Lösen Sie (irgendwie) das Gleichungssystem

$$2x + 3z^2 - 9z = 4, \quad y - 2z^2 + 3z = 1, \quad z^3 - 3z^2 - 2z = 0\,!$$

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

Finden Sie (irgendwie) Ideale in $\mathbb{R}[X, Y]$, deren Nullstellenmengen genau die folgenden Punkte enthalten:

a) $(3, 5)$

b) $(\pm 1, \pm 1)$

c) $(1, 4)$, $(4, 7)$ und $(2, 5)$

d) $(1, 4)$, $(4, 1)$, $(4, 7)$, $(7, 4)$, $(2, 5)$ und $(5, 2)$

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) Das Ideal I von $\mathbb{R}[X, Y, Z]$ sei erzeugt vom Polynom $(X-1)^2 + (Y-2)^2 + (Z-3)^2$. Zeigen Sie, daß das Polynom $(X-1)(Y-2)(Z-3)$ zwar auf $V(I)$ verschwindet, nicht aber in $\sqrt{I}$ liegt!

b) Was ist $V\big((X-1)(Y-2)(ZZ-3)\big)$?

c) Zeigen Sie: Für jedes Ideal I von $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ gibt es ein Polynom $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, so daß $V(I) = V(f)$ ist!

d) Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$, so daß das Radikal des Ideals $\big((X-1)^3(X-2)^7(X-3)^{37}\big)$ von $\mathbb{Q}[X]$ gleich (f) ist!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 7. April 2016, um 15.25 Uhr