

10. März 2016

3. Übungsblatt Algebraische Statistik

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Berechnen Sie bezüglich der lexikographischen Ordnung auf $k[X, Y, Z]$ die folgenden S-Polynome:

- a) $S(X, YZ)$
- b) $S(X^2 + Y^2 + Z^2, 2Y^3 + Z^2)$
- c) $S(X^3 + 2X^2 + X + 1, Y^3 + 3Y + 2)$
- d) $S(X^2 + 3X + 5, X^3 + 2X^2 + 7)$
- e) $S(X + Y + 1, Y + 1)$

Aufgabe 2: (6 Punkte)

- a) $\ell^{(1)}, \dots, \ell^{(m)} \in k[X_1, \dots, X_n]$ seien lineare Polynome, d.h.

$$\ell^{(i)}(X_1, \dots, X_n) = a_{i1}X_1 + \dots + a_{in}X_n + b_i \quad \text{mit} \quad a_{ij}, b_i \in k.$$

Welche Bedingungen müssen diese linearen Polynome erfüllen, damit $\{\ell^{(1)}, \dots, \ell^{(m)}\}$ eine GRÖBNER-Basis bezüglich der lexikographischen Ordnung ist? Unter welchen zusätzlichen Bedingungen ist diese GRÖBNER-Basis minimal bzw. reduziert?

- b) Zeigen Sie: Wenn $\ell^{(i)}$ und $\ell^{(j)}$ das gleiche führende Monom haben, erzeugen $\ell^{(i)}$ und $S(\ell^{(i)}, \ell^{(j)})$ das gleiche Ideal wie $\ell^{(i)}$ und $\ell^{(j)}$.
- c) Finden Sie zwei lineare Polynome $\ell^{(1)}$ und $\ell^{(2)}$ derart, daß $\ell^{(1)}$ und $S(\ell^{(1)}, \ell^{(2)})$ nicht das gleiche Ideal wie $\ell^{(1)}$ und $\ell^{(2)}$ erzeugen!

Aufgabe 3: (3 Punkte)

f_1, \dots, f_r seien Polynome aus $k[X]$. Zeigen Sie, daß die reduzierte GRÖBNER-Basis des von f_1, \dots, f_r erzeugten Ideals nur aus dem ggT dieser Polynome besteht! (Wir nehmen von den vielen größten gemeinsamen Teilern einer Menge von Polynomen stets den mit höchstem Koeffizienten eins.)

Aufgabe 4: (6 Punkte)

- a) Berechnen Sie bezüglich der lexikographischen Ordnung eine GRÖBNER-Basis für das Ideal $I = (XY - 1, XZ - 1)$ von $k[X, Y, Z]$!
- b) Bestimmen Sie die reduzierte GRÖBNER-Basis dazu!
- c) Finden Sie eine Monomordnung, bezüglich derer $\{XY - 1, Y - Z\}$ die reduzierte GRÖBNER-Basis von I ist!
- d) Zeigen Sie, daß $V(I)$ eine Hyperbel ist!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 17. März 2016, um 15.25 Uhr