WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

3. März 2016

2. Übungsblatt Algebraische Statistik

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß man in der Definition einer Monomordnung die dritte Bedingung, die Wohlordnungseigenschaft also, ersetzen kann durch die folgende Bedingung: $(0, \dots 0) \in \mathbb{N}_0^n$ ist kleiner als jedes andere Element.
Hinweis: Verwenden Sie das Lemma von Dickson!

b) Zeigen Sie: Diese Bedingung ist auch äquivalent dazu, daß jeder der n Koordinateneinheitsvektor $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ größer ist als $(0, \dots, 0)$!

c) Geben Sie ein Beispiel einer Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}_0^n$ an, die zwar die ersten beiden Forderungen an eine Monomordnung erfüllt, nicht aber die dritte!

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

Zeigen Sie, daß ein Tupel $e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{N}_0^n$ bezüglich der graduierten lexikographischen Ordnung genau dann kleiner ist als $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{N}_0^n$, wenn

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} <_{\text{lex}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

gilt, wobei $<_{\text{lex}}$ die lexikographische Ordnung auf $\mathbb{N}_0^n$ (in Spaltenschreibweise) bezeichnet!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

Analog zur lexikographischen Ordnung auf $\mathbb{N}_0^n$ können wir auch auf $\mathbb{Z}^n$ eine Relation $<_{\text{lex}}$ definieren durch die Festlegung $(w_1, \dots, w_n) <_{\text{lex}} (z_1, \dots, z_n)$ genau dann wenn die erste von Null verschiedene Differenz $w_i - z_i$ negativ ist.

a) A sei eine nichtsinguläre $n \times n$-Matrix mit rationalen Zahlen als Einträgen; außerdem sei in jeder Spalte der erste von Null verschiedene Eintrag positiv. Zeigen Sie, daß durch $x <_A y$ genau dann, wenn $Ax <_{\text{lex}} Ay$ eine Monomordnung auf $\mathbb{N}_0^n$ definiert wird! (Die Elemente von $\mathbb{N}_0^n$ werden auch hier als Spaltenvektoren geschrieben.)
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 1!

b) Welche Probleme gibt es, wenn die Matrix singulär ist?

c) Welche Probleme gibt es, wenn der erste nichtverschwindende Eintrag einer der Spalten negativ ist?

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) Wenden Sie den Divisionsalgorithmus an auf die Division von $f = x^3y^2 + xy^4 + y^5$ durch $f_1 = xy - 2$ und $f_2 = y^3 - 1$ bezüglich der lexikographischen Ordnung!

b) Dividieren Sie f durch f_2 und f_1 bezüglich der graduiert-lexikographischen Ordnung!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 10. März 2016, um 15.25 Uhr