WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

25. Februar 2016

1. Übungsblatt Algebraische Statistik

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
Finden Sie ein Polynom dritten Grades, das an den Stellen $x = 0$, $x = \pm\frac{\pi}{2}$ und $x = \pm\pi$ (im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate) möglichst gut mit der Sinusfunktion übereinstimmt!

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Die Stichprobe $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ bestehe aus den fünf Punkten $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,1)$ und $(-1,-1)$.

a) Finden Sie zwei Polynome $f, g \in \mathbb{R}[X, Y]$, für die $\Delta = V(f, g)$ ist!

b) Bestimmen Sie alle statistischen Modelle, die auf quadratische Polynome führen und deren Koeffizienten auf Grund von Funktionswerten in den Punkten $(x, y) \in \Delta$ eindeutig bestimmt werden können!

c) Geben Sie die Menge $S = V(X^2 - Y^2, X^2 - 1)$ explizit an!

d) Bestimmen Sie auch hierfür alle höchstens quadratischen eindeutig identifizierbaren statistischen Modelle!

Aufgabe 3: *(2 Punkte)*

a) M sei eine beliebige Menge, und für jedes $\mu \in M$ sei ein Ideal I_μ eines festen Rings R gegeben. Zeigen Sie, daß auch der Durchschnitt aller I_μ ein Ideal ist!

b) Ist auch die Vereinigung der I_μ ein Ideal?

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*
Ein Ideal I eines Rings R heißt *Hauptideal,* wenn es ein $f \in R$ gibt, so daß $I = \{fg \mid g \in R\}$ ist. Falls jedes Ideal von R ein Hauptideal ist, bezeichnet man R als einen Hauptidealring. Zeigen Sie:

a) Für zwei Hauptideale (f), (g) ist $(f) \cdot (g) = (fg)$.

b) Nun sei $R = \mathbb{Z}$. Bestimmen Sie zu $a, b \in \mathbb{Z}$ Zahlen $c, d \in \mathbb{Z}$, so daß $(a) \cap (b) = (c)$ und $(a) + (b) = (d)$ ist!

c) Nun sei $R = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ und $f_1, \ldots, f_m \in R$. Dann ist $V(f_1, \ldots, f_m) = V(f_1^2 + \cdots + f_m^2)$

d) Für jedes System von endlich vielen Polynomgleichungen in $\mathbb{R}^n$ gibt es ein Hauptideal I von $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, so daß die Lösungsmenge des Systems gleich $V(I)$ ist.

e) Ist $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ ein Hauptidealring?

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 3. März 2016, um 15.25 Uhr