Kapitel 0
Was ist Algebra?

Die Zahlentheorie beschäftigt sich mit den (ganzen) Zahlen, die Geometrie von γεωμετρία mit dem Messen der Erde, aber woher kommt das Wort Algebra?

Um 830 legte der arabische Gelehrte ABU DSCHA'FAR MUḤAMMAD IBN MŪSĀ AL-CHWĀRIZMĪ sein zweites Buch *Al-Kitāb al-muchtasar fi hisab al-dschabr wa-'l-muqābala* oder kurz *Kitāb al-dschabr wa-'l-muqābala* vor; *al-dschabr* gab der Algebra ihren Namen, und der Autorenname AL-CHWĀRIZMĪ führte zum Wort Algorithmus. In deutscher Übersetzung heißt der volle Titel etwa *Kurzgefaßtes Buch über das Rechnen durch Ergänzen und Ausgleichen. Al-dschabr,* das Ergänzen oder Vervollständigen, besteht darin, negative Terme in einer Gleichung auf die andere Seite zu bringen; in einem Beispiel aus dem Buch wird etwa aus (in moderner Schreibweise) $x^2 = 40x - 4x^2$ durch *al-dschabr* die Gleichung $5x^2 = 40x$. *Al-muqābala,* das Ausgleichen, besteht darin, von zwei positiven Termen auf den beiden Seiten der Gleichung den einen auf Null zu reduzieren; aus $x^2+3x+5 = 7x+2$ wird also zunächst $x^2 + 5 = 4x + 2$ und dann $x^2 + 3 = 4x$.

ABU DSCHA'FAR MUHAMMAD IBN MŪSĀ AL-CHWĀRIZMĪ wurde um 780 geboren und arbeitete die meiste Zeit seines Lebens in Bagdad, insbesondere auch im *Haus der Weisheit,* das AL-MA'MŪM, der siebte Kalif, als wissenschaftliches Zentrum seines Reichs gegründet hatte. Eine der Aufgaben dieses Zentrums bestand darin, Texte klassischer griechischer Wissenschaftler ins Arabische zu übersetzen; viele Texte sind heute nur noch über diese Übersetzungen bekannt. Arbeitsgebiete am *Haus der Weisheit* waren vor allem Mathematik und Astronomie. Außer einem weiteren mathematischen Buch, das sich mit den indischen Ziffern befaßte, schrieb AL-CHWĀRIZMĪ auch Bücher über Geographie und Kartographie.

Aus heutiger Sicht besteht kaum ein Unterschied zwischen *al-dschabr* und *al-muqābala;* wir sagen einfach, daß wir einen Term auf die andere Seite bringen. Demnach ist Algebra also die Lehre vom auf die andere Seite bringen. Im neunten Jahrhundert waren die beiden Methoden noch grundverschieden, denn negative Zahlen begannen außerhalb Indiens erst im 16. Jahrhundert langsam in der Mathematik aufzutauchen. Auch die Null fing gerade erst an verwendet zu werden; davon handelt AL-CHWĀRIZMĪs erstes Buch, in dem er die indische Zahlenschrift in die arabische Welt brachte. Die Null wurde aber nicht als *Zahl* eingeführt, sondern nur als *Ziffer.* Dieses Wort kommt vom arabischen Wort für Null *ṣifr,* was von *ṣafira = leer sein* kommt, und das wiederum kommt vom Sanskrit-Wort *śūnya,* das Nichts oder die Leere.

In heutiger Sprechweise ist der Gegenstand des Buchs von AL-CHWĀRIZMĪ die Lösung linearer und quadratischer Gleichungen. Quadrate der Unbekannten kommen in seinen Gleichungen entweder gar nicht oder ohne Koeffizient (d.h. mit Koeffizient eins) vor; lineare und konstante Terme können auf beiden Seiten mit positiven Koeffizienten stehen, können aber auch fehlen. Da es die Null als Zahl noch nicht gab, konnte sie auch auf keiner der beiden Seiten stehen.

Unter diesen Randbedingungen entstehen Gleichungen, die sich durch *al-dschabr* und *al-muqābala* auf eine der folgenden sechs Normalformen bringen lassen:

$$x^2 = px, \quad x^2 = q, \quad px = q, \quad x^2+px = q, \quad x^2+q = px \quad \text{und} \quad x^2 = px+q\ ,$$

wobei p und q natürlich positive Zahlen sein müssen. Vom Lösen dieser sechs Typen von Gleichungen handelt das Buch. AL-CHWĀRIZMĪ benutzt dabei häufig eine geometrische Sprechweise und veranschaulicht seine Vorgehensweise auch geometrisch.

Die nach *al-dschabr* benannte Algebra befaßte sich somit traditionell mit dem Lösen von Gleichungen. Erst im neunzehnten Jahrhundert begann man sich auch für in diesem Zusammenhang auftretende strukturelle Fragen zu interessieren. Was wir heute als *abstrakte Algebra* bezeichnen, geht größtenteils erst auf den Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts zurück.

Kapitel 1
Klassische Lösungsformeln

Wir beginnen mit dem klassischen Grundproblem der Algebra, dem Lösen von Polynomgleichungen in einer Variablen, d.h. Gleichungen der Form

$$a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \,.$$

Über den Zahlbereich, in dem die Koeffizienten liegen, wollen wir uns dabei im Augenblick noch keine großen Gedanken machen. In den meisten Beispielen werden die Koeffizienten ganze, rationale, reelle oder komplexe Zahlen sein; der Zahlbereich könnte aber auch einfach irgendein Körper oder Ring sein. Um Lösungen zu finden, müssen wir oft auch in einem größeren Zahlbereich suchen: Die Gleichung $2x - 3 = 0$ hat beispielsweise ganzzahlige Koeffizienten, aber keine ganzzahligen Lösungen, sondern nur die rationale Lösung $x = \frac{2}{3}$.

Wir werden stets annehmen, daß a_d nicht verschwindet und bezeichnen dann d als den *Grad* der Gleichung.

§1: Lineare Gleichungen

Gleichungen vom Grad eins oder lineare Gleichungen sind problemlos zu lösen: Da gemäß unserer Annahme in $ax + b = 0$ der Koeffizient a von x nicht verschwindet, können wir (eventuell erst nach Übergang zu einem größeren Zahlbereich) b auf die andere Seite bringen (je nach Vorzeichen von b ist das *al-dschabr* oder *al-muqābala*) und dann beide Seiten durch a dividieren, um die Lösung $x = -\frac{b}{a}$ zu erhalten.

§2: Quadratische Gleichungen

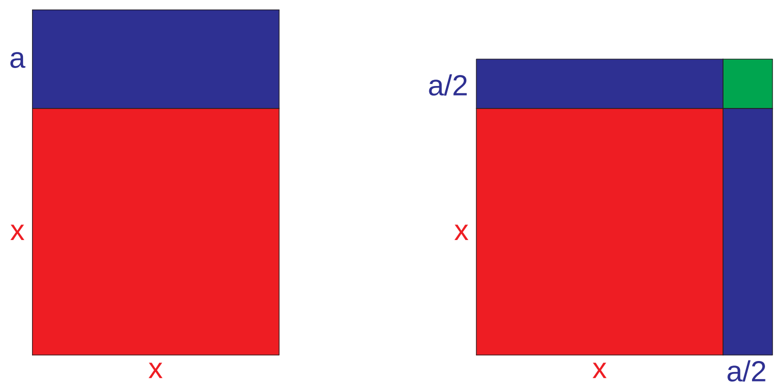
Gleichungen vom Grad zwei werden üblicherweise als quadratische

Gleichungen bezeichnet; Verfahren zur ihrer Lösung waren in allen frühen Hochkulturen bekannt. Die ältesten erhaltenen Hinweise deuten darauf hin, daß die Babylonier schon vor rund vier Jahrtausenden damit vertraut waren.

Der Ansatz zur Lösung der Gleichung $x^2 + ax = b$ läßt sich am einfachsten geometrisch verstehen: Wir suchen nach einem Quadrat mit unbekannter Seitenlänge x derart, daß die Fläche des Quadrats zusammen mit der des Rechtecks mit Seiten x und a gleich b ist.

Die linke unter den beiden folgenden Zeichnungen zeigt dieses Quadrat und darüber das Rechteck; auf der rechten Seite ist die Hälfte des Rechtecks neben das Quadrat gewandert, so daß abgesehen von dem kleinen Quadrat rechts oben nun ein Quadrat mit Seitenlänge $x + \frac{a}{2}$ entstanden ist. Die Größe des kleinen Quadrats ist bekannt: Seine Seitenlänge ist $\frac{a}{2}$. Wir suchen somit eine Zahl x derart, daß das Quadrat mit Seitenlänge $x+\frac{a}{2}$ die Fläche $b+\frac{a^2}{4}$ hat; das Problem ist also zurückgeführt auf das Ziehen einer Quadratwurzel:

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}\,.$$



(Eine ähnliche Zeichnung befindet sich übrigens auch im Buch von AL-CHWĀRIZMĪ; er teilt das Rechteck mit Seiten a und x allerdings auf in vier Rechtecke mit Seiten $a/4$ und x und setzt diese an die vier Seiten des Quadrats. Das gibt eine etwas schönere Zeichnung, dafür muß er vier Quadrate mit Seitenlänge $a/4$ hinzufügen, um auf ein Quadrat mit Seitenlänge $x + a/2$ zu kommen.)

Wie die Babylonier auf diese Lösungsformel kamen, ist nicht bekannt; in den überlieferten Schriften wird nur der fertige Lösungsweg anhand von Beispielen präsentiert. Sie wußten aber auf jeden Fall, daß die Summe der Lösungen der Gleichung $x^2 - ax + b = 0$ gleich a ist und ihr Produkt gleich b – einen Beweis in einem allgemeineren Zusammenhang werden wir in Kürze kennen lernen. Damit ist das Lösen der Gleichung $x^2 - ax + b$ äquivalent dazu, zwei Zahlen x_1 und x_2 zu finden mit

$$x_1 + x_2 = a \quad \text{und} \quad x_1 x_2 = b\,.$$

Die führt zu einer alternativen Herleitung der Lösungsformel: Wir machen den Ansatz

$$x_{1/2} = \frac{a}{2} \pm u$$

mit einer neuen Unbekannten u; damit ist die erste Gleichung automatisch erfüllt. Für die zweite erhalten wir nach der den Babyloniern bekannten dritten binomischen Formel

$$b = x_1 x_2 = \left(\frac{a}{2} + u\right)\left(\frac{a}{2} - u\right) = \frac{a^2}{4} - u^2\,, \quad \text{also} \quad u = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\,.$$

Somit ist $x_{1/2} = \dfrac{a}{2} \pm \sqrt{\dfrac{a^2}{4} - b}\,.$

Falls $\frac{a^2}{4} - b > 0$ ist, liefert uns das zwei reelle Lösungen; falls der Radikand Null ist, fallen beide zusammen. Für die Babylonier, die ihre Mathematik benutzten, um Größen aus der realen Welt zu berechnen, ging es nur um reelle Lösungen; heute interessieren wir uns auch für Gleichungen, bei denen unter der Wurzel eine negative oder sogar eine komplexe Zahl steht. Im Falle einer negativen Zahl ist die Wurzel rein imaginär und somit problemlos; für eine komplexe Zahl allerdings stellt sich die Frage, wie wir die Wurzel aus $c + di$ mit $c, d \in \mathbb{R}$ und $d \neq 0$ in der Form $u + iv$ mit $u, v \in \mathbb{R}$ darstellen können. Die Gleichung

$$(u + iv)^2 = u^2 - v^2 + 2iuv = c + id$$

führt auf die beiden reellen Gleichungen

$$u^2 - v^2 = c \quad \text{und} \quad 2uv = d\,.$$

Wegen $d \neq 0$ können auch u und v nicht verschwinden; daher können wir die zweite Gleichung umformen zu $v = d/2u$ und das in die erste Gleichung einsetzen:

$$u^2 - \frac{d^2}{4u^2} = c\,.$$

Multiplikation mit $4u^2$ macht daraus

$$4u^4 - d^2 = 4cu^2 \quad \text{oder} \quad u^4 - cu^2 - \frac{d^2}{4} = 0\,.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für u^2 mit den beiden Lösungen

$$u^2 = \frac{c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2}\,.$$

Als Quadrat einer reellen Zahl muß $u^2 \geq 0$ sein; die Lösung mit dem Minuszeichen kommt daher nicht in Frage: Für negatives $c \in \mathbb{R}$ ist sie offensichtlich negativ, und für positives c auch, denn wegen $d \neq 0$ ist $\sqrt{c^2 + d^2}$ größer als der Betrag von c. Somit sind

$$u = \pm\sqrt{\frac{c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2}} \quad \text{und} \quad v = \frac{d}{2u}$$

problemlos berechenbar.

§3: Der Wurzelsatz von Viète

Während Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen seit Jahrtausenden bekannt sind, tauchte die erste allgemeine Formel zur Lösung einer kubischen Gleichung erst vor gut 500 Jahren auf. Das lag nicht daran, daß sich vorher niemand dafür interessierte: Die klassische griechische Mathematik etwa kannte eine ganze Reihe von Problemen, die auf Gleichungen dritten Grades führten, und sie kannte auch geometrische Lösungsverfahren dafür. Diese Verfahren kamen allerdings nicht mit Zirkel und Lineal aus, so daß sie als weniger „rein“ und damit auch weniger interessant galten. Von einer allgemeinen Lösungsformel war man weit entfernt.

In speziellen Fällen lassen sich aber gelegentlich leicht Lösungen auch von Gleichungen sehr hohen Grades finden. Ausgangspunkt dazu ist eine Umkehrung des Problems: Wir fragen uns nicht, wie wir aus den

Koeffizienten der Gleichung die Lösungen bestimmen können, sondern wie wir aus den Lösungen die Koeffizienten erhalten.

Dazu erinnern wir uns zunächst an die den meisten wohl aus der Schule oder aus Anfängervorlesungen bekannte Polynomdivision mit Rest: Ein Polynom ist bekanntlich eine formale Summe

$$f = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

mit Koeffizienten $a_i \in k$ und einem „Symbol“ X. Falls alle a_i verschwinden, reden wir vom *Nullpolynom;* ansonsten nehmen wir, wie bei den Gleichungen, an, daß a_d nicht verschwindet und bezeichnen $d = \deg f$ als den *Grad* und a_d als den führenden Koeffizienten von f. Das Nullpolynom hat keinen Grad.

Oft ist es üblich, den Buchstaben x sowohl als Bezeichnung für eine Variable als auch für eine konkrete Lösung einer Gleichung zu verwenden. Die folgenden Überlegungen werden aber wohl klarer, wenn wir zwischen den beiden Bedeutungen unterscheiden: Große Buchstaben stehen für Variablen und kleine für Zahlen. Der Wert des obigen Polynoms f an der Stelle x ist somit die Zahl

$$f(x) = x^d + a_{d-1} x^{d-1} + a_{d-2} x^{d-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \, .$$

Nun seien f und g Polynome mit Koeffizienten aus einem Körper k mit $\deg f = d$ und $\deg g = e$. Der Divisionsalgorithmus konstruiert dazu Polynome q und r mit Koeffizienten aus k für die $f = qg + r$ gilt, wobei r entweder das Nullpolynom ist oder einen kleineren Grad als g hat. Wir bezeichnen q als den *Quotienten* und r als den *Divisionsrest.* Sie werden wie folgt bestimmt:

Schritt 0: Setze $r = f$ und $q = 0$. b_e sei der führende Koeffizient von g.

Schritt i, $i \geq 1$: Falls $r = 0$ ist oder $\deg r < \deg g$, endet der Algorithmus. Andernfalls sei a der führende Koeffizient von r. Wir eliminieren den führenden Term von r, indem wir r ersetzen durch $r - \frac{a}{b_e} X^{\deg r - e} g$. Gleichzeitig ersetzen wir q durch $q + \frac{a}{b_e} X^{\deg r - e}$.

Dieser Algorithmus endet nach endlich vielen Schritten, denn in jedem Schritt ab dem ersten wird der Summand von r mit der höchsten X-Potenz eliminiert, so daß der Grad von r um mindestens eins kleiner wird oder r sogar zum Nullpolynom wird. Nach endlich vielen Schritten ist daher entweder $r = 0$ oder $\deg r < \deg g$, so daß der Algorithmus endet.

Nach Schritt 0 ist $qg + r = 0 \cdot g + f = f$, und wenn diese Gleichung $f = qg + r$ vor Beginn des i-ten Schritts gilt, gilt sie auch danach, denn q wird ersetzt durch $q + \frac{a}{b_e}X^{\deg r - e}$ und r durch $r - \frac{a}{b_e}X^{\deg r - e}g$, und

$$\left(q + \frac{a}{b_e}X^{\deg r - e}\right)q + \left(r - \frac{a}{b_e}X^{\deg r - e}g\right) = qg + r = f\,.$$

Nach Beendigung des Algorithmus ist außerdem noch $r = 0$ oder $\deg r < \deg e$, so daß der Algorithmus das gewünschte Ergebnis liefert.

Da wir wiederholt durch b_e dividieren, wobei die Werte von a von Schritt zu Schritt variieren können, mußten wir annehmen, daß die Koeffizienten in einem Körper liegen. Es gibt allerdings eine Ausnahme: Falls der führende Koeffizient von g gleich eins ist, sind keine Divisionen notwendig, und der Algorithmus funktioniert auch bei Koeffizienten aus einem (kommutativen) Ring wie beispielsweise den ganzen Zahlen.

Das wollen wir anwenden auf die Nullstellen eines Polynoms, die im betrachteten Koeffizientenbereich liegen. x sei also eine solche Nullstelle des Polynoms

$$f = a_dX^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_1X + a_0\,,$$

das heißt

$$f(x) = a_dx^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0\,.$$

Wir wenden den Divisionsalgorithmus an auf f und $g = X - x$. Er liefert Polynome q, r derart, daß $f = qg+r$ ist mit $r = 0$ oder $\deg r < \deg g = 1$. Der Divisionsrest r ist also in jedem Fall eine Konstante. Wenn wir x einsetzen, ergibt sich $0 = f(x) = q(x)g(x) + r = r$, da $g(x) = x - x = 0$ ist. Somit gibt es ein Polynom q derart, daß $f = q\cdot(X - x)$ ist. Falls dabei auch $q(x) = 0$ ist, gibt es ein weiteres Polynom q_2, so daß $q = q_2\cdot(X - x)$ ist und damit $f = q_2 \cdot (X - x)^2$. Wenn auch $q_2(x)$ verschwindet, können wir weitermachen, bis wir schließlich eine Darstellung $f = q_n\cdot(X - x)^n$ erhalten mit $q_n(x) \neq 0$. Wir sagen dann, x sei eine n-fache Nullstelle oder die Vielfachheit der Nullstelle x sei n.

Falls wir eine weitere Nullstelle $x' \neq x$ von f kennen, muß $q_n(x')$ verschwinden, denn $X - x$ verschwindet natürlich nicht an der Stelle x'. Wenn wir ℓ verschiedene Nullstellen $x_1, \ldots, x_\ell$ kennen mit Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_\ell$, erhalten wir somit eine Darstellung

$$f = \widetilde{q} \cdot (X - x_1)^{n_1} \cdots (X - x_\ell)^{n_\ell} .$$

Ist d der Grad von f, so ist $d = \deg \widetilde{q} + n_1 + \cdots n_\ell$; damit folgt

Lemma: Die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms vom Grad d ist, auch mit Vielfachheiten gezählt, höchstens gleich dem Grad. ∎

Wir werden später sehen, daß es stets einen Körper gibt, in dem die Anzahl der Nullstellen des Polynoms mit Vielfachheiten gezählt gleich dem Grad ist. Für Polynome mit reellen Koeffizienten ist das beispielsweise der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, aber es gibt stets auch noch deutlich kleinere Körper mit dieser Eigenschaft.

Die Tatsache, daß $X - x$ für eine Nullstelle x eines Polynoms f ein Teiler von f ist, läßt sich für Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten zum Erraten zumindest der ganzzahligen Nullstellen verwenden:

Lemma: $f = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ sei ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Falls $f(x)$ für eine ganze Zahl $x \neq 0$ verschwindet, ist x ein Teiler von a_0. ($f(0) = 0$ ist natürlich äquivalent zu $a_0 = 0$.)

Beweis: Wie wir oben gesehen haben, gibt es ein Polynom q derart, daß $f = q \cdot (X - x)$ ist. Da $X - x$ den höchsten Koeffizienten eins hat und $x \in \mathbb{Z}$, entstehen in jedem Schritt des Divisionsalgorithmus wieder Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten; daher hat auch der Quotient q ganzzahlige Koeffizienten. Ist b_0 der konstante Koeffizient von q, so ist a_0 das Produkt von b_0 mit dem konstanten Koeffizienten $-x$ von $X - x$, d.h. $a_0 = -b_0 x$, d.h. a_0 ist ein Vielfaches von x und x damit ein Teiler von a_0. ∎

Als Beispiel betrachten wir die kubische Gleichung $x^3 - 7x + 6 = 0$. Das Polynom $f = X^3 - 7X + 6$ hat den konstanten Koeffizienten 6;

falls es ganzzahlige Nullstellen gibt, müssen diese also unter den Zahlen $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ und ± 6 sein. Einsetzen zeigt, daß $f(1) = f(2) = 0$, $f(-1) = f(-2) = f(3) = 12$ und $f(-3) = 0$ ist. Da es nicht mehr als drei Nullstellen geben kann, hat die kubische Gleichung daher die drei Lösungen $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -3$.

Bei einer Gleichung ohne ganzzahlige Lösungen führt dieser Ansatz natürlich nicht zum Ziel, aber da wir im Voraus nicht wissen, ob es ganzzahlige Lösungen gibt, ist er doch oft einen Versuch wert. Selbst wenn wir damit nur einen Teil der Nullstellen finden, können wir die zugehörigen Linearfaktoren abdividieren und erhalten für die restlichen Nullstellen eine Gleichung kleineren Grades.

Tatsächlich läßt sich die Methode noch ausbauen. Wir nehmen dazu an, wir hätten ein Polynom f, das über einem hinreichend großen Körper in Linearfaktoren zerfällt, d.h.

$$\begin{aligned} f &= a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \\ &= a_d (X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_d)\,, \end{aligned}$$

wobei die x_i natürlich nicht alle verschieden sein müssen. Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{d-1} &= -a_d \sigma_1(x_1, \ldots, x_d) \quad &&\text{mit} \quad \sigma_1(x_1, \ldots, x_d) = x_1 + \cdots + x_n \\ a_{d-2} &= a_d \sigma_2(x_1, \ldots, x_d) \quad &&\text{mit} \quad \sigma_2(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{i<j} x_i x_j \\ a_{d-3} &= -a_d \sigma_3(x_1, \ldots, x_d) \quad &&\text{mit} \quad \sigma_3(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k \\ &\vdots \qquad \vdots \\ a_0 &= (-1)^d a_d \sigma_d(x_1, \ldots, x_d) \quad &&\text{mit} \quad \sigma_d(x_1, \ldots, x_d) = x_1 \cdots x_d\,. \end{aligned}$$

Allgemein ist a_{d-r} bis aufs Vorzeichen gleich der Summe alle Produkte aus r Werten x_i mit verschiedenem Index. Diese Summen bezeichnet man als die *elementarsymmetrischen Funktionen* $\sigma_r(x_1, \ldots, x_d)$ und die obigen Gleichungen als den Wurzelsatz von VIÈTE.

FRANÇOIS VIÈTE (1540–1603) studierte Jura an der Universität Poitiers, danach arbeitete er als Hauslehrer. 1573, ein Jahr nach dem Massaker an den Hugenotten, berief ihn CHARLES IX (obwohl VIÈTE Hugenotte war) in die Regierung der Bretagne; unter HENRI III wurde er geheimer Staatsrat. 1584 wurde er auf Druck der katholischen Liga vom Hofe verbannt und beschäftigte sich fünf Jahre lang nur mit Mathematik. Unter HENRI IV arbeitete er wieder am Hof und knackte u.a. verschlüsselte Botschaften an den spanischen König PHILIP II. In seinem Buch *In artem analyticam isagoge* rechnete er als erster systematisch mit symbolischen Größen, führte also die „Buchstabenrechnung“ ein. Auch die mathematische Formelschreibweise geht auf ihn zurück, insbesondere auch die Zeichen „+“ und „-“ für Addition und Subtraktion.

Für eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ besagt der Satz von VIÈTE einfach, daß die Summe der Lösungen gleich $-p$ und das Produkt gleich q ist, was die Babylonier schon vor rund vier Jahrtausenden die wußten.

Diese elementarsymmetrischen Funktionen sind für r-Werte im mittleren Bereich recht umfangreiche Summen, die beiden Fälle $r = 0$ und $r = d - 1$ können aber gelegentlich sehr nützlich sein, um Lösungen zu erraten, vor allem wenn $a_d = 1$ ist:

Falls wir aus irgendeinem Grund erwarten, daß alle Nullstellen eine Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ganzzahlig sind, ist ihr Produkt gleich $(-1)^d a_0/a_d$ ist und ihre Summe gleich $-a_{d-1}/a_d$.

Bei der oben betrachteten Gleichung $f(x) = x^3 - 7x + 6 = 0$ etwa ist das Produkt aller Nullstellen gleich -6 und ihre Summe verschwindet. Aus den Zahlen $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ und ± 6 müssen wir also drei (nicht notwendigerweise verschiedene) finden mit Summe Null und Produkt -6. Das geht offensichtlich nur mit $1, 2$ und -3; Einsetzen zeigt, daß dies auch tatsächlich Nullstellen sind. Damit mußten wir nur drei Zahlen einsetzen, statt wie oben sechs, um alle Lösungen zu finden.

Man beachte, daß dieses Einsetzen unbedingt notwendig ist: Bei der Gleichung $g(x) = x^3 - 6x + 6 = 0$ hätten wir genauso vorgehen können und wären auf dieselben drei Kandidaten gekommen, aber $g(1) = 1, g(2) = 2$ und $g(-3) = -3$. (Daß die Lösungsmenge nicht$\{1,2,-3\}$ sein kann, erkennt man auch daran, daß

$$\sigma_2(1,2,-3) = 1\cdot 2 + 1\cdot(-3) + 2\cdot(-3) = -7$$

nicht gleich dem Koeffizienten Null von x^2 ist.)

Auch die Gleichung $x^3 - 21x - 20 = 0$ läßt sich leicht nach VIÈTE lösen: Hier ist das Produkt aller Nullstellen gleich 20; *falls* sie alle ganzzahlig sind, kommen also nur $\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10$ und ±20 in Frage. Aus diesen zwölf Zahlen müssen wir drei (nicht notwendigerweise verschiedene) auswählen mit Produkt 20 und Summe null. Das geht offensichtlich nur mit $-1, -4$ und 5, und wieder zeigt Einsetzen, daß dies auch tatsächlich Nullstellen sind.

Betrachten wir als nächstes Beispiel das Polynom

$$f = X^4 + 14X^3 - 52X^2 - 14X + 51$$

mit $a_0 = 51 = 3\cdot 17$. Da das Produkt aller Nullstellen diesen Wert haben muß, kommen – *falls* alle Nullstellen ganzzahlig sind – für diese nur die Werte $\pm1, \pm3, \pm17$ und ±51 in Frage. Wäre eine der Nullstellen ±51, müßten alle anderen den Betrag eins haben und die Summe könnte nicht gleich -14 sein. Daher muß eine Nullstelle Betrag drei und eine Betrag 17 haben, die beiden anderen Betrag eins. Produkt 51 und Summe -14 erzwingt dabei offensichtlich, daß sowohl +1 als auch -1 Nullstellen sind, außerdem -17 und +3. Einsetzen zeigt, daß alle vier auch tatsächlich Nullstellen sind.

Beim Polynom $X^3 - 3X - 2$ ist das Produkt aller Nullstellen -2 und die Summe verschwindet. Die Teiler von -2 sind ±1 und ±2; Einsetzen zeigt, daß nur -1 und 2 Nullstellen sind. Sowohl aus dem Verschwinden der Summe als auch aus dem Produkt -2 folgt, daß -2 eine doppelte Nullstelle sein muß, d.h. $X^3 - 3X - 2 = (X+1)^2(X-2)$.

Beim Polynom

$$f = X^6 + 27X^5 - 318X^4 - 5400X^3 - 10176X^2 + 27648X + 32768$$

ist $a_0 = 32768 = 2^{15}$; hier wissen wir also nur, daß – sofern alle Nullstellen ganzzahlig sind – jede Nullstelle die Form $\pm2^i$ haben muß, wobei die Summe aller Exponenten gleich 15 sein muß und die Anzahl der negativen Vorzeichen gerade. Einsetzen zeigt, daß

$$-1, \quad 2, \quad -4, \quad -8, \quad 16, \quad -32$$

die Nullstellen sind.

Gelegentlich lassen sich auch nicht ganzzahlige Nullstellen mit Hilfe des Satzes von VIÈTE erraten: Bei Polynom $X^4+X^3-7X^2-5X+10$ ist das Produkt der Nullstellen zehn. Wie Einsetzen zeigt, sind 1 und -2 Nullstellen. Ihre Summe ist -1 und ihr Produkt -2. Die beiden restlichen Nullstellen haben somit die Summe Null und das Produkt -5. Wir suchen also Zahlen x_3 und x_4 mit $x_4 = -x_3$ und $x_3x_4 = -x_3^2 = -5$. Daher müssen x_3 und x_4 gleich $\pm\sqrt{5}$ sein.

Man beachte, daß die Anwendung des Satzes von VIÈTE nur deshalb so gut funktionierte, weil die betrachteten Polynome höchsten Koeffizient eins hatten. Ist das nicht der Fall, ist das Produkt der Nullstellen gleich dem Quotienten aus konstantem Koeffizienten und führendem Koeffizienten mal $(-1)^{\text{Grad}}$, und wenn das keine ganze Zahl ist, können wir nicht mehr mit Teilbarkeit argumentieren, sondern müssen uns auf der Suche nach rationalen Lösungen auch mit den möglichen Nennern beschäftigen

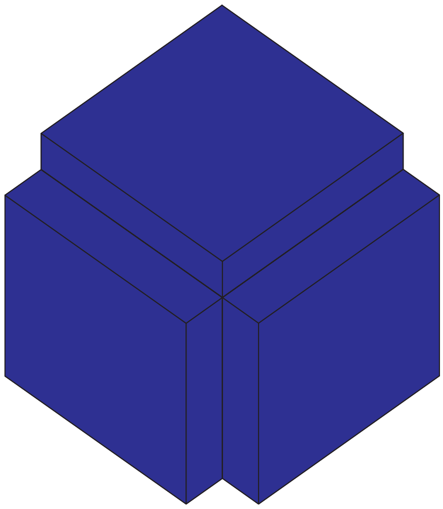
§4: Kubische Gleichungen

Wie bereits zu Beginn des vorigen Paragraphen erwähnt, gibt es seit rund 500 Jahren, genauer seit 1515, auch Ansätze zur Lösung allgemeiner kubischer Gleichungen.

Wenn wir versuchen, für die Gleichungen $x^3 + ax^2 = b$ eine ähnlich Strategie zu finden wie im Fall der Gleichung $x^2 + ax = b$, müssen wir ins Dreidimensionale gehen und auf den Würfel mit Kantenlänge x eine quadratische Säule mit Basisquadrat der Seitenlänge x und Höhe a stellen. Um sie so zu verteilen, daß wir möglichst nahe an einen neuen Würfel kommen, müssen wir jeweils ein Drittel davon auf drei der Seitenflächen des Würfels platzieren.

Leider fehlt hier nun nicht nur ein Würfel der Kantenlänge $\frac{a}{3}$, sondern auch noch drei quadratische Säulen der Höhe x auf Grundflächen mit

Seitenlänge $\frac{a}{3}$. Wir können das Volumen des Würfels mit Seitenlänge $x + \frac{a}{3}$ also nicht einfach durch die bekannten Größen a, b ausdrücken, sondern haben auch noch einen Term mit der Unbekannten x.



Trotzdem ist diese Idee nützlich, sogar für Gleichungen höheren Grades. Die allgemeine Gleichung d-ten Grades hat die Form

$$a_d x^n + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0\,,$$

wobei wir natürlich wie immer voraussetzen, daß a_d nicht verschwindet. Falls wir über einem Körper arbeiten, können wir durch a_d dividieren und erhalten die neue Gleichung

$$x^d + c_{d-1} x^{d-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = 0 \quad \text{mit} \quad c_i = \frac{a_i}{a_d}\,,$$

deren höchster Koeffizient eins ist.

Geometrisch betrachtet wollen wir einen d-dimensionalen Hyperwürfel bekommen, dessen Seitenlänge $x + \frac{c_{d-1}}{d}$ sein sollte; rechnerisch bedeutet dies, daß wir die Zahl $y = x + \frac{c_{d-1}}{d}$ betrachten und überall in der Gleichung x durch $y - \frac{c_{d-1}}{d}$ ersetzen:

$$\begin{aligned}
&x^d + c_{d-1} x^{d-1} + c_{d-2} x^{d-2} + \cdots + c_1 x + c_0 \\
&= \left(y - \frac{c_{d-1}}{d}\right)^d + c_{d-1}\left(y - \frac{c_{d-1}}{d}\right)^{d-2} + \cdots + c_1\left(y - \frac{d_{n-1}}{d}\right) + c_0 \\
&= \left(y^d - c_{d-1} y^{d-1} + d c_{d-1}^2 y^{d-2} + \cdots\right) \\
&\quad + c_{d-1}\left(y^{d-1} - \frac{(d-1)c_{d-1}}{d} y^{d-2} + \cdots\right)
\end{aligned}$$

$$+ c_{d-2}\left(y^{d-2} - \frac{(d-2)c_{d-1}}{d}y^{d-3} + \cdots\right)$$
$$+ \cdots$$
$$= y^d + \left(dc_{d-1}^2 - \frac{(d-1)c_{d-1}^2}{d} + c_{d-2}\right) y_{d-2} + \cdots \ .$$

Wir kommen also auf eine Gleichung d-ten Grades in y, die keinen Term mit y^{d-1} hat.

Im Falle $d = 2$ hat diese Gleichung die Form $y^2 + p = 0$; wir können ihre Nullstellen also einfach durch Wurzelziehen ermitteln. Für $d > 2$ haben wir immerhin einen Term weniger als in der allgemeinen Gleichung d-ten Grades und müssen sehen, ob uns das bei der Lösung helfen kann.

Im Falle der kubischen Gleichungen reicht es somit, die etwas speziellere Gleichung

$$y^3 + py + q = 0$$

zu lösen. Auch wenn die Griechen geometrische Konstruktionen (jenseits von Zirkel und Lineal) kannten, mit denen sie Lösungen kubischer Gleichungen konstruieren konnten, dauerte es bekanntlich bis ins 16. Jahrhundert, bevor eine explizite Lösungsformel gefunden war – ein Zeichen dafür, daß der Lösungsansatz nicht gerade offensichtlich ist.

Der Trick, der schließlich zum Erfolg führte, ist folgender: Wir schreiben y als Summe zweier neuer Zahlen u und v und machen dadurch das Problem auf den ersten Blick nur schwieriger. Andererseits ist diese Summendarstellung natürlich alles andere als eindeutig; wir können daher hoffen, daß es auch dann noch Lösungen gibt, wenn wir an u und v zusätzliche Forderungen stellen und dadurch das Problem vielleicht vereinfachen.

Einsetzen von $y = u + v$ führt auf die Bedingung

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0 \ .$$

Dies können wir auch anders zusammenfassen als

$$(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u+v) = 0 \ ,$$

und natürlich verschwindet diese Summe insbesondere dann, wenn beide Summanden einzeln verschwinden. Falls es uns also gelingt, zwei Zahlen u, v zu finden mit

$$u^3 + v^3 = -q \quad \text{und} \quad 3uv = -p\,,$$

haben wir eine Lösung gefunden.

Zwei solche Zahlen u, v erfüllen erst recht die schwächere Bedingung

$$u^3 + v^3 = -q \quad \text{und} \quad u^3 \cdot v^3 = -\frac{p^3}{27}\,;$$

wir kennen also die Summe und das Produkt ihrer dritten Potenzen. Damit kennen wir aber, wie wir bereits sowohl in §2 als auch §3 gesehen haben, auch u^3 und v^3 als Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + qx - \frac{1}{27}p^3$. Somit ist

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$\text{und} \qquad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\,,$$

wobei es auf die Reihenfolge natürlich nicht ankommt.

Damit kennen wir u^3 und v^3. Für u und v selbst gibt es dann jeweils drei Möglichkeiten, allerdings führen nicht alle neun Kombinationen dieser Möglichkeiten zu Lösungen, denn für eine Lösung muß ja die Bedingung $3uv = -p$ erfüllt sein, nicht nur $u^3 \cdot v^3 = -\frac{1}{27}p^3$.

Dies läßt sich am besten dadurch gewährleisten, daß wir für u *irgendeine* der drei Kubikwurzeln von u^3 nehmen und dann $v = -p/3u$ setzen. Die drei Lösungen der kubischen Gleichung $y^3 + py + q = 0$ sind also

$$y = u - \frac{p}{3u} \quad \text{mit} \quad u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,,$$

wobei für u nacheinander jede der drei Kubikwurzeln eingesetzt werden muß. (Es spielt keine Rolle, welche der beiden Quadratwurzeln wir nehmen, denn ersetzen wir die eine durch die andere, vertauschen wir dadurch einfach u und v.)

Da selbst von den drei Kubikwurzeln einer reellen Zahl nur eine reell ist, müssen wir zur Bestimmung aller drei Lösungen einer kubischen Gleichung mit reellen Koeffizienten *immer* auch mit komplexen Zahlen rechnen, selbst wenn alle Lösungen reell sind.

Wenn wir eine Kubikwurzel w_0 einer komplexen Zahl kennen, lassen sich die beiden anderen leicht bestimmen: Ist w eine von ihnen, so ist $(w/w_0)^3 = 1$, d.h. w/w_0 ist eine Nullstelle des Polynoms $X^3 - 1$. Dieses hat die Eins als Nullstelle; wenn wir durch $X - 1$ dividieren erhalten wir den Quotienten $X^2 + X + 1$, der nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen die beiden Nullstellen

$$\rho = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} \quad \text{und} \quad \bar\rho = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$$

hat. Die beiden anderen Kubikwurzeln sind also $w_0\rho$ und $w_0\bar\rho$. Ihr Produkt $\rho\bar\rho$ ist $|\rho|^2 = 1$, d.h. die beiden sind invers zueinander, so daß die Division durch eine der beiden Wurzeln äquivalent ist zur Multiplikation mit der anderen. Ist in der Lösungsformel für die kubische Gleichung daher u irgendeine feste dritte Wurzel, so sind die drei Lösungen gleich

$$u - \frac{p}{3u}, \quad u\rho - \frac{p}{3u\rho} = u\rho - \frac{p}{3u}\bar\rho \quad \text{und} \quad u\bar\rho - \frac{p}{3u\bar\rho} = u\bar\rho - \frac{p}{3u}\rho\,.$$

Im sechzehnten Jahrhundert wurde das natürlich nicht so formuliert: Die mathematische Formelschreibweise führte schließlich erst VIÈTE einige Jahrzehnte später ein. TARTAGLIA, der die Lösungsmethode für die Gleichung $x^3 + px = q$ für positive Werte p, q fand, arbeite im übrigen auch nicht mit den Größen u und v, sondern mit deren dritten Potenzen. Er beschrieb seine Methode gegenüber CARDANO in einem Gedicht:

Quando chel cubo con le cose appresso
Se agguaglia à qualche numero discreto
Trouan dui altri differenti in esso.

Depoi terrai questo per consueto
Che'llor produtto sempre sta eguale
Al terzo cubo delle cose neto.

El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratto
Varra la tua cosa principale.

Die erste Lösung einer kubischen Gleichung geht wohl aus SCIPIONE DEL FERRO (1465–1526) zurück, der von 1496 bis zu seinem Tod an der Universität Bologna lehrte. 1515 fand er eine Methode, um die Nullstellen von $x^3 + px = q$ für *positive* Werte von p und q zu bestimmen (Negative Zahlen waren damals in Europa noch nicht im Gebrauch). Er veröffentlichte diese jedoch nie, so daß NICCOLO FONTANA (1499–1557, oberes Bild), genannt TARTAGLIA (der Stotterer), dieselbe Methode 1535 noch einmal entdeckte und gleichzeitig auch noch eine Modifikation, um einen leicht verschiedenen Typ kubischer Gleichungen zu lösen. TARTAGLIA war mathematischer Autodidakt, war aber schnell als Fachmann anerkannt und konnte seinen Lebensunterhalt als Mathematiklehrer in Verona und Venedig verdienen.

Die Lösung allgemeiner kubischer Gleichungen geht auf den Mathematiker, Arzt und Naturforscher GIROLAMO CARDANO (1501–1576, unteres Bild) zurück, dem TARTAGLIA nach langem Drängen und unter dem Siegel der Verschwiegenheit seine Methode mitgeteilt hatte. LODOVICO FERRARI (1522–1565) kam 14-jährig als Diener zu CARDANO; als dieser merkte, daß FERRARI schreiben konnte, machte er ihn zu seinem Sekretär. 1540 fand FERRARI die Lösungsmethode für biquadratische Gleichungen; 1545 veröffentlichte CARDANO trotz seines Schweigeversprechens gegenüber TARTAGLIA die Lösungsmethoden für kubische und biquadratische Gleichungen in seinem Buch *Ars magna.*

Frei übersetzt: Wenn der Kubus zusammen mit dem Produkt mit einer Sache eine gewisse Zahl ergibt, drücke diese aus als eine Differenz zweier anderen. Danach stelle sicher, daß das Produkt dieser beiden immer gleich dem Kubus eines Drittels der Sache ist. Die Lösung ist dann die Differenz der Kubikwurzeln der beiden.

In heutiger mathematischer Sprechweise: Zur Lösung der Gleichung $x^3 + px = q$ schreibe q als eine Differenz $q = U - V$. Stelle sicher, daß $UV = \left(\frac{p}{3}\right)^3$ ist. Dann ist $x = \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V}$.

Betrachten wir als einfaches Beispiel die Gleichung

$$(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0\,;$$

sie hat nach Konstruktion die drei Lösungen $1, 2$ und 3.

Falls wir das nicht wüßten, würden wir als erstes durch die Substitution $y = x - 2$ den quadratischen Term eliminieren. Einsetzen von $x = y + 2$ liefert

$$(y+2)^3 - 6(y+2)^2 + 11(y+2) - 6$$
$$= y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 24y - 24 + 11y + 22 - 6 = y^3 - y\,,$$

wir müssen also zunächst die Gleichung $y^3 - y = 0$ lösen. Hierzu brauchen wir selbstverständlich keine Lösungstheorie kubischer Gleichungen: Ausklammern von y und die dritte binomische Formel zeigen sofort, daß

$$y^3 - y = y(y^2 - 1) = y(y+1)(y-1)$$

genau an den Stellen $y = -1, 0, 1$ verschwindet, und da $x = y + 2$ ist, hat die Ausgangsgleichung die Lösungen $x = 1, 2, 3$.

Wenden wir trotzdem unsere Lösungsformel an: Bei dieser Gleichung ist $p = -1$ und $q = 0$, also

$$u_1 = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{-1}{27}}} = \sqrt[6]{\frac{-1}{27}} = \sqrt{\frac{-1}{3}}$$

für die rein imaginäre Kubikwurzel. Das zugehörige v_1 muß die Gleichung $u_1 v_1 = \frac{1}{3}$ erfüllen, also ist $v_1 = -u_1$, und wir erhalten als erste Lösung $y_1 = u_1 + v_1 = 0$.

Die beiden anderen Kubikwurzeln erhalten wir, indem wir die bekannte Kubikwurzel mit einer der beiden komplexen dritten Einheitswurzeln multiplizieren, d.h. also mit ρ und mit $\bar{\rho}$.

$$u_2 = \sqrt{\frac{-1}{3}}\rho = \frac{\sqrt{3}}{3}i\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$$

und

$$v_2 = \frac{1}{3u_2} = \frac{-2}{3 + \sqrt{3}\,i} = \frac{-2(3 - \sqrt{3}\,i)}{3^2 + (\sqrt{3})^2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\,;$$

wir erhalten somit die Lösung $y_2 = u_2 + v_2 = -1$.

Die dritte Kubikwurzel

$$u_3 = \sqrt{\frac{-1}{3}}\bar{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{3}i\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$$

schließlich führt auf

$$v_3 = \frac{1}{3u_3} = \frac{2}{3-\sqrt{3}\,i} = \frac{2(3+\sqrt{3}\,i)}{3^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$$

und liefert so die Lösung $y_3 = u_3 + v_3 = 1$.

Etwas komplizierter wird es bei der aus §3 bekannten Gleichung

$$x^3 - 7x + 6 = 0\,,$$

deren Lösungen wir dort über den Satz von VIÈTE so leicht erraten konnten. Da sie keinen x^2-Term hat, können wir gleich $p = -7$ und $q = 6$ in die Formel einsetzen und erhalten

$$u = \sqrt[3]{-3+\sqrt{\frac{6^2}{4}-\frac{7^3}{27}}} = \sqrt[3]{-3+\sqrt{-\frac{400}{4\cdot 27}}} = \sqrt[3]{-3+\frac{10}{9}\sqrt{3}\,i}\,.$$

Was nun? Wenn wir einen Ansatz der Form $u = r + is$ machen, kommen wir auf ein System von zwei kubischen Gleichungen in zwei Unbekannten, also ein schwierigeres Problem als unsere Ausgangsgleichung.

Eine Alternative ist die Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen: Eine komplexe Zahl $z = x + iy$ läßt sich bekanntlich auch darstellen als $z = re^{i\varphi}$ mit $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ und $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Da $e^{i\varphi}\cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$ ist, werden bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen in Polarkoordinatendarstellung die Beträge miteinander multipliziert und die Winkel addiert. Daher ist $\sqrt[3]{|z|}\bigl(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\bigr)$ eine dritte Wurzel von z. Leider gibt es aber keine einfache Formel, die Sinus und Kosinus von $\frac{\varphi}{3}$ durch $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ ausdrückt. Aus den Additionstheoremen können wir uns natürlich leicht Formeln für $\cos 3\varphi$ verschaffen; wir erhalten

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\,.$$

Um $x = \cos\frac{\varphi}{3}$ zu berechnen, müssen wir also die kubische Gleichung $4x^3 - 3x = \cos\varphi$ lösen, was uns wiederum auf die Berechnung einer Kubikwurzel führt, *usw.*

Trotzdem ist die obige Darstellung der Lösung nicht völlig nutzlos: Sie gibt uns immerhin Formeln für den Real- und den Imaginärteil der Lösung, und diese Formeln können wir numerisch auswerten.

Für den hier interessierenden Radikanden $z = -3 + \frac{10}{9}\sqrt{3}\,i$ ist

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + \left(\frac{10}{9}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+300}{81}} = \sqrt{\frac{9\cdot 27+100}{27}}$$

$$= \sqrt{\frac{343}{27}} = \sqrt{\frac{7^3}{3^3}} = \frac{7}{9}\sqrt{21}\,.$$

Somit ist

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = -\frac{9}{49}\sqrt{21} \approx -0{,}84169975767$$

und

$$\sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{10}{49}\sqrt{7} \approx 0{,}5399492473\,.$$

Der Arkuskosinus des ersten Werts ist ungefähr 2,571215844, der Arkussinus des zweiten 0,5703768102. Wenn wir φ im Intervall $(-\pi,\ \pi]$ suchen, folgt aus der Negativität von $\cos\varphi$, daß $|\varphi| > \frac{\pi}{2}$ sein muß; daher ist φ ungefähr gleich dem ersten der beiden Werte. (Der zweite ist natürlich $\pi - \varphi$, was den gleichen Sinus hat.)

Damit können wir eine dritte Wurzel näherungsweise bestimmen; wir erhalten

$$u_1 = \sqrt[3]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right) \approx 0{,}9999999994 + 1{,}154700538i$$

(Je nach Taschenrechner oder Programm kann das Ergebnis auch leicht verschieden sein.) und damit als erste Lösung

$$x_1 = u_1 + \frac{7}{3u_1} \approx 1{,}9999999999 - 10^{-9}i\,.$$

Wie jedes numerische Ergebnis stimmt diese Zahl natürlich nur näherungsweise und hängt im übrigen auch sowohl von der Stellenzahl als auch der Rundung ab. Zumindest in diesem Fall ist die Hypothese, daß es sich hier um eine durch Rundungsfehler verfälschte Zwei handeln könnte, eine Überlegung wert. Einsetzen zeigt, daß die Zwei tatsächlich eine Lösung ist. Für die beiden anderen dividieren am besten das Polynom durch $X-2$ und lösen dann die Quotientengleichung $x^2+2x-3 = 0$.

Obwohl die drei Lösungen $1, 2$ und -3 unserer Gleichung allesamt ganzzahlig sind, konnten wir dies also durch bloßes Einsetzen in unsere Formel nicht erkennen und konnten insbesondere die Kubikwurzel nur durch Erraten und Nachprüfen in einer einfachen Form darstellen.

Bei der ebenfalls in §3 betrachteten Gleichung $x^3+6x+6 = 0$, bei der uns VIÈTE nicht weiterhelfen konnte, ist die Anwendung der Lösungsformel übrigens deutlich einfacher: Einsetzen der Parameter $p = -6$ und $q = 6$ in die Lösungsformel führt zunächst auf

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9-8}} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$$

für die reelle Wurzel; die erste Lösung ist also

$$x_1 = u_1 - \frac{p}{3u_1} = -\sqrt[3]{2} - \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}\,.$$

Für die zweite und dritte Lösung müssen wir mit $u_2 = u_1\rho$ *bzw.* $u_3 = u_1\bar{\rho}$ anstelle von u_1 arbeiten und erhalten

$$x_2 = -\sqrt[3]{2}\,\rho - \frac{2}{\sqrt[3]{2}\,\rho} = -\sqrt[3]{2}\,\rho - \sqrt[3]{4}\,\bar{\rho} \qquad \text{und}$$
$$x_3 = -\sqrt[3]{2}\,\bar{\rho} - \frac{2}{\sqrt[3]{2}\,\bar{\rho}} = -\sqrt[3]{2}\,\bar{\rho} - \sqrt[3]{4}\,\rho\,,$$

was nach Einsetzen von $\rho = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ und $\bar{\rho} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ auf die beiden komplexen Lösungen

$$x_{2/3} = -\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$= \frac{\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}}{2} \pm \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}\right)}{2}i$$

führt. Natürlich erfüllen auch diese Zahlen den Satz von VIÈTE, jedoch hilft uns dieser nicht, sie zu erraten.

Wenn wir eine reelle Kubikwurzel finden können, ist die Situation auch nicht unbedingt viel besser. Betrachten wir etwa die Gleichung

$$x^3 - 3x^2 + 9x + 13 = 0\,.$$

Hier setzen wir $x = y + 1$ und erhalten die neue Gleichung

$$\begin{aligned}(y+1)^3 - 3(y+1)^2 + 9(y+1) + 13 \\ = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3(y^2 + 2y + 1) + 9y + 9 + 13 \\ = y^3 + 6y + 20 = 0\end{aligned}$$

mit $p = 6$ und $q = 20$. Damit ist $\frac{p}{3} = 2$ und $\frac{q}{2} = 10$, also

$$u = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{100+8}} = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{108}} = \sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}}$$

Da 108 größer ist als $(-10)^2 = 100$, gibt es eine positive reelle Wurzel u_1; wir rechnen zunächst mit dieser und erhalten als erste Lösung

$$y_1 = u_1 - \frac{p}{3u_1} = \sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}}} .$$

Damit haben wir im Prinzip eine Lösung gefunden. Wenn wir sie allerdings numerisch auswerten, erhalten wir etwas wie -1,99999998, und damit drängt sich natürlich der Verdacht auf, daß dies gleich -2 sein könnte. Einsetzen von $y = -2$ in unsere kubische Gleichung zeigt in der Tat, daß

$$(-2)^3 + 6 \cdot (-2) + 20 = -8 - 12 + 20 = 0$$

ist. Aber warum ist

$$\sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}}} = -2 ,$$

und wie, vor allem, kann man das der linken Seite ansehen?

Wie die Erfahrung der Computeralgebra zeigt, kann es extrem schwierig sein, auch nur zu entscheiden, ob zwei Wurzelausdrücke gleich sind; direkte allgemeine Verfahren dazu gibt es nicht. Unsere Formel gibt uns daher zwar immer drei Wurzelausdrücke, die Lösungen der gegebenen Gleichung sind, aber diese können für Zahlen stehen, die sich auch sehr viel einfacher ausdrücken lassen.

Im vorliegenden Fall, wo die numerische Berechnung eine Vermutung nahelegt, können wir wieder versuchen, diese zu beweisen: Aus der vermuteten Gleichung

$$u_1 - \frac{2}{u_1} = -2 \quad \text{folgt} \quad u_1^2 - 2 = -2u_1 .$$

Quadratische Ergänzung macht daraus $(u_1+1)^2 = 3$, also ist u_1 eine der beiden Zahlen $-1 \pm \sqrt{3}$. Die dritte Potenz davon ist

$$(-1 \pm \sqrt{3})^3 = -1 \pm 3\sqrt{3} - 3 \cdot 3 \pm 3\sqrt{3} = -10 \pm 6\sqrt{3}\,,$$

also ist tatsächlich $u_1 = -1 + \sqrt{3}$ und

$$\begin{aligned} y_1 &= -1 + \sqrt{3} - \frac{2}{-1+\sqrt{3}} = -1 + \sqrt{3} - \frac{2(-1-\sqrt{3})}{(-1+\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})} \\ &= -1 + \sqrt{3} + \frac{2+2\sqrt{3}}{-2} = -2\,. \end{aligned}$$

Nachdem wir u_1 in einfacher Form ausgedrückt haben, lassen sich auch die anderen beiden Lösungen berechnen:

$$u_2 = u_1\rho = (-1+\sqrt{3}) \cdot \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2} = \frac{(1-\sqrt{3}) + (3-\sqrt{3})i}{2}$$

und

$$u_3 = u_1\bar{\rho} = (-1+\sqrt{3}) \cdot \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2} = \frac{(1-\sqrt{3}) - (3-\sqrt{3})i}{2}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{2}{u_2} &= \frac{4\big((1-\sqrt{3}) - (3-\sqrt{3})i\big)}{(1-\sqrt{3})^2 + (3-\sqrt{3})^2} = \frac{4\big((1-\sqrt{3}) - (3-\sqrt{3})i\big)}{16 - 8\sqrt{3}} \\ &= \frac{\big((1-\sqrt{3}) - (3-\sqrt{3})i\big)(2+\sqrt{3})}{2(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{-(1+\sqrt{3}) - (3+\sqrt{3})i}{2}\,, \end{aligned}$$

also

$$y_2 = u_2 - \frac{2}{u_2} = \frac{(1-\sqrt{3}) + (3-\sqrt{3})i}{2} + \frac{(1+\sqrt{3}) + (3+\sqrt{3})i}{2} = 1 + 3i\,.$$

Entsprechend folgt $y_3 = u_3 - \dfrac{2}{u_3} = 1 - 3i$.

Die Mathematiker des sechzehnten Jahrhunderts, auf die die Lösungsformel für kubische Gleichungen zurückgeht, hatten natürlich weder Computer noch Taschenrechner noch komplexe Zahlen; auch Dezimalbrüche in ihrer heutigen Form kamen erst im siebzehnten Jahrhundert auf, als die ersten Tafeln trigonometrischer Funktionen und kurz später auch Logarithmen veröffentlicht wurden. Doch auch ohne diese Hilfsmittel konnten sie erstaunlich gut mit der Lösungsformel umgehen. In §3.2 des Buchs

TEO MORA: Solving Polynomial Equation Systems I: The Kronecker-Duval Philosophy, *Cambridge University Press,* 2003

sind zwei Beispiele für ihre Vorgehensweise zu finden:

Bei der Gleichung $x^3 + 3x - 14 = 0$ ist $p = 3$ und $q = -14$, also

$$u = \sqrt[3]{7 + \sqrt{7^2 + 1^3}} = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}\,.$$

Beim vorigen Beispiel hatten wir gesehen, daß

$$\sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}} = -1 + \sqrt{3}$$

ist; eine Zahl der Form $a + b\sqrt{3}$ hat in diesem speziellen Fall also eine Kubikwurzel derselben Form $c+d\sqrt{3}$. Das gilt natürlich nicht allgemein; die Kubikwurzel aus $\sqrt{3}$, die sechste Wurzel von drei also, läßt sich sicher nicht in der Form $c + d\sqrt{3}$ mit ganzen Zahlen c und d schreiben. Trotzdem können wir unser Glück versuchen.

Für den Radikanden $7 + 5\sqrt{2}$ machen wir natürlich einen Ansatz der Form $c + d\sqrt{2}$. Wir wollen, daß

$$(c + d\sqrt{2})^3 = c^3 + 3c^2d\sqrt{2} + 6cd^2 + 2d^3\sqrt{2} = 7 + 5\sqrt{2}$$

ist mit $c, d \in \mathbb{Z}$, also

$$c^3 + 6cd^2 = 7 \quad \text{und} \quad 3c^2d + 2d^3 = 5\,.$$

Damit haben wir, wie schon oben erwähnt, ein System von *zwei* kubischen Gleichungen anstelle von einer, jetzt allerdings suchen wir nur nach ganzzahligen Lösungen. Aus der ersten Gleichung können wir c ausklammern und erhalten $c(c^2 + 6d^2) = 7$. Somit muß c ein Teiler von sieben sein, d.h. $c = \pm 1$ oder $c = \pm 7$. Die negativen Zahlen scheiden aus, da die Klammer nicht negativ werden kann, und auch $c = 7$ ist nicht möglich, denn dann wäre die linke Seite mindestens gleich 7^3. Wenn es eine ganzzahlige Lösung gibt, muß daher $c = 1$ sein; durch Einsetzen folgt, daß dann mit $d = \pm 1$ die erste Gleichung in der Tat erfüllt ist. Die zweite Gleichung $d(3c^2 + 2d^2) = 5$ zeigt, daß auch d positiv sein muß und $c = d = 1$ beide Gleichungen erfüllt. Somit ist

$$u = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

für die reelle unter den drei Kubikwurzeln. Da wir eine Gleichung mit reellen Koeffizienten haben, muß auch das zugehörige v reell sein und kann genauso wie u bestimmt werden:

$$v = \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2} \quad \text{und} \quad x = u + v = 2\,.$$

Damit war die Gleichung für die Zwecke des sechzehnten Jahrhunderts gelöst, denn da es noch keine komplexen Zahlen gab, suchte auch niemand nach komplexen Lösungen.

Wir interessieren uns allerdings für komplexe Lösungen; die beiden noch fehlenden Lösungen können wir entweder berechnen als $u\rho + v\bar\rho$ und $u\bar\rho + v\rho$, oder aber wir dividieren das Polynom $X^3 + 3X - 14$ durch $X - 2$ und erhalten das quadratische Polynom $X^2 + 2X + 7$ mit den Nullstellen $-1 \pm \sqrt{6}\,i$.

Bei Gleichungen mit drei reellen Nullstellen führt die Lösungsformel, wie wir in §9 sehen werden, *immer* übers Komplexe, aber auch damit wurden CARDANO und seine Zeitgenossen fertig. MORA betrachtet als Beispiel dafür die Gleichung $x^3 - 21x - 20 = 0$. Hier ist

$$u = \sqrt[3]{10 + \sqrt{10^2 - 7^3}} = \sqrt[3]{10 + \sqrt{-243}} = \sqrt[3]{10 + 9\sqrt{-3}}\,.$$

$\sqrt{-3}$ war für CARDANO im Gegensatz zu $\sqrt{2}$ keine Zahl; trotzdem rechnete er damit als mit einem abstrakten Symbol gemäß der Regel $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-3} = -3$.

Wenn wir wieder auf unser Glück vertrauen und einen Ansatz der Form $u = c + d\sqrt{-3}$ machen, kommen wir auf das Gleichungssystem

$$c^3 - 9cd^2 = 10 \quad \text{und} \quad 3c^2d - 3d^3 = 9\,.$$

Ausklammern von c *bzw.* d und Kürzen der zweiten Gleichung durch drei führt auf

$$c(c^2 - 9d^2) = 10 \quad \text{und} \quad d(c^2 - d^2) = 3\,.$$

Wenn es ganzzahlige Lösungen gibt, muß wegen der zweiten Gleichung $d = \pm 1$ oder $d = \pm 3$ sein. $d = \pm 1$ führt auf $c^2 - 1 = \pm 3$, also $d = 1$ und $c = \pm 2$; für $d = \pm 3$ läßt sich kein ganzzahliges c finden. Einsetzen in die erste Gleichung zeigt, daß $c = -2, d = 1$ das System löst, also ist $u_1 = -2 + \sqrt{-3}$ eine der drei Wurzeln. Die erste Lösung der kubischen Gleichung ist also

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 + \sqrt{-3} + \frac{7}{-2 + \sqrt{-3}} \\ &= -2 + \sqrt{-3} + \frac{7(-2 + \sqrt{-3})}{(-2 + \sqrt{-3})(-2 - \sqrt{-3})} \\ &= -2 + \sqrt{-3} + \frac{-14 + 7\sqrt{-3}}{7} = -4\,. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der beiden anderen Lösungen haben nun viele Möglichkeiten: Wir könnten das Polynom $X^3 - 21X - 20$ durch $X - x_1$, also $X + 4$, dividieren und damit das Problem auf die Lösung einer quadratischen Gleichung reduzieren, oder wir könnten die beiden weiteren Werte für u als $u_2 = u_1\rho$ und $u_3 = u_1\bar{\rho}$ berechnen, oder wir könnten den Satz von VIÈTE anwenden, der uns hier problemlos alle drei Lösungen gibt. Zur Zeit CARDANOs gab es keine dieser Möglichkeiten: Mit Polynomen rechnete man erst im achtzehnten Jahrhundert, und die komplexen Zahlen wurden sogar erst im neunzehnten Jahrhundert eingeführt. CARDANO rechnete zwar mit „Symbolen“ wie $\sqrt{-3}$, aber die einzige Lösung der Gleichung $x^3 = 1$ war für ihn – wie für alle seiner Zeitgenossen – die Eins. FRANÇOIS VIÈTE schließlich war 1545, als CARDANOs *Ars magna* erschien, gerade fünf Jahre alt.

Wie die obige Rechnung zeigte, sind $c = -2$ und $d = 1$ die einzigen ganzzahligen Lösungen der Gleichung $(c + d\sqrt{-3})^3 = 10 + 9\sqrt{-3}$. Vielleicht gibt es aber weitere Lösungen, wenn wir für c und d auch rationale Zahlen zulassen. Nun haben wir allerdings bei der Suche nach ganzzahligen Lösungen viel mit Teilbarkeit argumentiert, und im Körper der rationalen Zahlen ist jedes Element durch jedes andere außer der Null teilbar. Wir müssen uns daher auf Zahlen mit einem festen Nenner beschränken; dann kommen wir wieder zu Beziehungen zwischen ganzen Zahlen und können versuchen, wie oben vorzugehen.

Der kleinstmögliche Nenner ist zwei; versuchen wir also unser Glück mit dem Ansatz

$$\left(\frac{c}{2}+\frac{d}{2}\sqrt{-3}\right)^3 = 10+9\sqrt{-3}\,,$$

wobei c und d wieder ganze Zahlen sein sollen. Ausmultiplizieren, Multiplikation mit acht und Ausklammern führt auf die Gleichungen

$$c(c^2-9d^2)=80 \quad\text{und}\quad d(c^2-d^2)=24\,,$$

wobei mindestens eine der Zahlen c und d ungerade sein muß, da wir ansonsten wieder eine Wurzel mit ganzzahligem Real- und Imaginärteil bekommen, also die bereits bekannte. Da rechts jeweils gerade Zahlen stehen, sieht man leicht, daß dann beide Zahlen ungerade sein müssen; damit bleiben also für c als Teiler von achtzig nur die Möglichkeiten ± 1 und ± 5. Für d als Teiler von 24 sind $d=\pm 1$ und $d=\pm 3$ möglich. Einsetzen zeigt, daß $c=-1, d=-3$ und $c=5, d=1$ die einzigen Lösungen sind. Die beiden verbleibenden Kubikwurzeln von $-10+9\sqrt{-3}$ sind somit

$$u_2=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3} \quad\text{und}\quad u_3=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{-3}\,.$$

Damit lassen sich nun leicht

$$x_2=u_2+\frac{7}{u_2}=-1 \quad\text{und}\quad x_3=u_3+\frac{7}{u_3}=5$$

berechnen. Die Gleichung $x^3-21x-20=0$ hat also die drei ganzzahligen Lösungen -1, -4 und 5.

Wie die Beispiele in diesem Paragraphen zeigen, haben wir es beim exakten Lösen kubischer Gleichungen mit der hier betrachteten Formel oft mit komplizierten Ausdrücken zu tun, von denen sich nachher (nach teilweise recht trickreichen Ansätzen) herausstellt, daß sie sich tatsächlich sehr viel einfacher darstellen lassen. Dies ist ein allgemeines Problem der Computeralgebra, zu dem es leider keine allgemeine Lösung gibt: Wie D. RICHARDSON 1968 gezeigt hat, kann es keinen Algorithmus geben, der von zwei beliebigen reellen Ausdrücken entscheidet, ob sie gleich sind oder nicht. Dabei reicht es schon, wenn wir nur Ausdrücke betrachten, die aus ganzen Zahlen, den Grundrechenarten, der Sinus- und der Betragsfunktion sowie der Zahl π aufgebaut werden können. Jedenfalls sollte klar geworden sein, daß das Lösung von kubischen Gleichung deutlich aufwendiger ist als das von quadratischen und daß die Lösungsformel hier keine problemlos anwendbare Mitternachtsformel ist. Kein Wunder, daß CARDANO seinem Buch, in dem er die Lösung kubischer und biquadratischer Gleichungen behandelte, den Titel *Ars magna,* die „große Kunst“ gab.

§5: Biquadratische Gleichungen

1840 fand CARDANOs ehemaliger Diener und späterer Sekretär LODOVICO FERRARI eine Lösungsmethode für Gleichungen vom Grad vier. Hier wird zunächst der kubische Term von

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

eliminiert durch die Substitution $x = y - \frac{a}{4}$; dies führt auf eine Gleichung der Form

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0\,.$$

Zu deren Lösung benutzen wir (nach FERRARI) einen anderen Trick als im kubischen Fall: Wir versuchen, die Gleichung so zu modifizieren, daß wir ihre Lösungen als die Lösungen zweier quadratischer Gleichungen berechnen können.

Dazu nehmen wir an, wir hätten eine Lösung y der Gleichung und betrachten dazu für eine zunächst noch beliebige Zahl u die Zahl $y^2 + u$. Da $y^4 + py^2 + qy + r$ verschwindet, ist $y^4 = -py^2 - qy - r$, also

$$(y^2 + u)^2 = y^4 + 2uy^2 + u^2 = (2u - p)y^2 - qy + u^2 - r\,.$$

Falls rechts das Quadrat eines linearen Polynoms $sy + t$ steht, ist

$$(y^2 + u)^2 = (sy + t)^2 \Longrightarrow y^2 + u = \pm(sy + t)\,,$$

wir müssen also nur die beiden quadratischen Gleichungen

$$y^2 \mp (sy + t) + u = 0$$

lösen, um die Lösungen der biquadratischen Gleichung zu finden.

Natürlich läßt sich die rechte Seite $(2u-p)y^2 - qy + u^2 - r$ im allgemeinen nicht als ein Quadrat $(sy+t)^2$ schreiben; wir können aber hoffen, daß sie zumindest für gewisse spezielle Werte der bislang noch willkürlichen Konstanten u eines ist.

Ein quadratisches Polynom $\alpha Y^2 + \beta Y + \gamma$ ist genau dann Quadrat eines linearen, wenn die beiden Nullstellen der quadratischen Gleichung $\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$ übereinstimmen. Diese Nullstellen können wir nach der Formel aus §2 berechnen:

$$y^2+\frac{\beta}{\alpha}y+\frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Longrightarrow y = -\frac{\beta}{2\alpha}\pm\sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}} = -\frac{\beta}{2\alpha}\pm\frac{1}{2\alpha}\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}\,.$$

Die beiden Lösungen fallen somit genau dann zusammen, wenn $\beta^2-4\alpha\gamma$ verschwindet. In unserem Fall ist $\alpha = (2u-p)$, $\beta = -q$ und $\gamma = u^2 - r$; wir erhalten also die Bedingung

$$q^2 - 4(2u-p)(y^2-r) = -8u^3 + 4pu^2 + 8ru + q^2 - 4pr = 0\,.$$

Dies ist eine kubische Gleichung für u, die wir mit der Methode aus dem vorigen Abschnitt (vielleicht) lösen können. Ist u_0 eine der Lösungen, so steht in der Gleichung

$$(y^2 + u_0)^2 = (2u_0 - p)y^2 - qy + u_0^2 - r$$

rechts das Quadrat eines linearen Polynoms $sy + t$, das wir – da wir alle Koeffizienten kennen – problemlos hinschreiben können. Dies führt dann nach Wurzelziehen zu zwei quadratischen Gleichungen für y, deren Wurzeln die Nullstellen von $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ sind.

Es wäre nicht schwer, mit Hilfe der Lösungsformel für kubische Gleichungen, eine explizite Formel für die vier Lösungen hinzuschreiben; sie ist allerdings erstens deutlich länger und zweitens für die praktische Berechnung reeller Nullstellen mindestens genauso problematisch wie die für kubische Gleichungen. Auf Beispiele zur Lösung biquadratischer Gleichungen verzichte ist, denn schon in einfachen Fällen ist die kubische Gleichung für u selbst dann sehr kompliziert, wenn es eine reelle Lösung gibt, die in der Lösungsformel in rein reeller Form auftaucht.

Für numerische Berechnungen sind übrigen sowohl die Lösungsmethode für kubische Gleichungen als auch die für biquadratische eher nicht geeignet, da es beim Einsetzen in die Formeln oft vorkommen kann, daß zwei ungefähr gleich große Zahlen voneinander subtrahiert werden, so daß die Anzahl der geltenden Ziffern dramatisch kleiner wird. Die klassischen numerischen Verfahren zur Nullstellenbestimmung liefern genauere Ergebnisse und sind einfacher anzuwenden.

§ 6: Gleichungen höheren Grades

Nach der (mehr oder weniger) erfolgreichen Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen in der ersten Hälfte des sechzehnten Jahrhunderts beschäftigten sich natürlich viele Mathematiker mit dem nächsten Fall, der Gleichung fünften Grades. Hier gab es jedoch über 250 Jahre lang keinerlei Fortschritt, bis zu Beginn des neunzehnten Jahrhunderts ABEL glaubte, eine Lösung gefunden zu haben. Er entdeckte dann aber recht schnell seinen Fehler und bewies stattdessen 1824, daß es keine allgemeinen Lösungsformel für Gleichungen fünften (oder höheren) Grades geben kann, die nur mit Grundrechenarten und Wurzeln auskommt.

Die Grundidee seines Beweises liegt in der Betrachtung von Symmetrien innerhalb der Lösungsmenge: Man betrachtet die Menge aller Permutationen der Nullstellenmenge, die durch Abbildungen $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ erreicht werden können, wobei φ sowohl mit der Addition als auch der Multiplikation verträglich sein muß. ABEL zeigt, daß diese Permutationen für allgemeine Gleichungen vom Grad größer vier eine (in heutiger Terminologie) *nichtauflösbare* Gruppe bilden und daß es aus diesem Grund keine Lösungsformel geben kann, in der nur Grundrechenarten und Wurzeln vorkommen. Ein großer Teil dieser Vorlesung wird sich damit beschäftigen, dies genauer zu verstehen.

Der norwegische Mathematiker NILS HENRIK ABEL (1802–1829) ist trotz seinen frühen Todes (an Tuberkulose) Initiator vieler Entwicklungen der Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts; Begriffe wie abelsche Gruppen, abelsche Integrale, abelsche Funktionen, abelsche Varietäten, die auch in der heutigen Mathematik noch allgegenwärtig sind, verdeutlichen seinen Einfluß. Zu seinem 200. Geburtstag stiftete die norwegische Regierung einen ABEL-Preises für Mathematik mit gleicher Ausstattung und Vergabebedingungen wie die Nobelpreise; erster Preisträger war 2003 JEAN-PIERRE SERRE (*1926) vom Collège de France für seine Arbeiten über algebraische Geometrie, Topologie und Zahlentheorie.

Der ABELsche Satz besagt selbstverständlich nicht, daß Gleichungen höheren als vierten Grades *unlösbar* seien; er sagt nur, daß es *im allgemeinen* nicht möglich ist, die Lösungen durch Wurzelausdrücke in den Koeffizienten darzustellen: Für eine allgemeine Lösungsformel muß man also außer Wurzeln und Grundrechenarten noch weitere Funktionen zulassen. Beispielsweise fanden sowohl HERMITE als auch KRONECKER 1858 Lösungsformeln für Gleichungen fünften Grades mit sogenannten elliptischen Modulfunktionen; 1870 löste JORDAN damit Gleichungen beliebigen Grades.

§7: Symmetrische Polynome

In §3 haben wir gesehen, daß sich die Koeffizienten eines Polynoms als Polynome in den Nullstellen darstellen lassen. Die Darstellung der Nullstellen als Polynome in den Koeffizienten ist nicht möglich; schon bei quadratischen Polynomen brauchen wir auch Wurzeln, und ab Grad fünf geht es nach dem Satz von ABEL nicht einmal mit diesen. Wir können uns aber fragen, ob es nicht zumindest für manche Polynome in den Nullstellen möglich ist, sie auch als Polynome in den Koeffizienten auszudrücken. Im nächsten Paragraphen wollen wir das Ergebnis dann anwenden auf die Frage, wann ein Polynom mehrfache Nullstellen hat. Über die Nullstellen läßt sich das natürlich einfach entscheiden, und wir werden sehen, daß wir das Kriterium mit den Methoden aus diesem Paragraphen so umschreiben können, daß wir ein Polynom in den Koeffizienten erhalten, das genau dann verschwindet, wenn es eine mehrfache Nullstelle gibt.

Wir kennen bereits Polynome in den Nullstellen, die sich auch als Polynome in den Koeffizienten schreiben lassen, nämlich die elementarsymmetrischen Polynome, die ja bei führendem Koeffizienten eins bis eventuell aufs Vorzeichen gerade die Koeffizienten sind. Sie sind Polynome, die sich nicht verändern, wenn ihre Variablen in irgendeiner Weise permutiert werden. Solche Polynome bezeichnen wir als symmetrisch:

Definition: *a)* Die *symmetrische Gruppe* $\mathfrak{S}_n$ ist die Menge aller bijektiver Abbildungen der Menge $\{1, \dots, n\}$ auf sich selbst; ihre Elemente heißen *Permutationen.*
b) Ein Polynom f in den n Variablen $X_1, \dots, X_n$ heißt *symmetrisch,* wenn für jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ gilt:

$$f(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)}) = f(X_1, \dots, X_n) .$$

Der folgende Satz besagt, daß sich jedes symmetrische Polynom durch die elementarsymmetrischen ausdrücken läßt:

Satz: f sei ein symmetrisches Polynom in $X_1, \dots, X_n$. Dann gibt es ein Polynom g in n neuen Variablen $Y_1, \dots, Y_n$, so daß gilt

$$f(X_1, \dots, X_n) = g\big(\sigma_1(X_1, \dots, X_n), \dots, \sigma_n(X_1, \dots, X_n)\big) .$$

Beweis: Zur Konstruktion von g ordnen wir die Monome $X_1^{e_1} \cdots X_n^{e_n}$ von f graduiert lexikographisch an, d.h. das Monom $X_1^{d_1} \cdots X_n^{d_n}$ heißt größer als $X_1^{e_1} \cdots X_n^{e_n}$, wenn sein Grad $d_1 + \cdots + d_n$ größer ist als $e_1 + \cdots + e_n$, oder wenn die Grade gleich sind und die erste von Null verschiedene Differenz $d_i - e_i$ positiv ist. Für ein symmetrisches Polynom, muß im ersten, dem sogenannten *führenden* Monom, $e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_n$ sein, denn wegen der Symmetrie muß mit $X_1^{e_1} \cdots X_n^{e_n}$ auch jedes Monom $X_1^{e_{\pi(1)}} \cdots X_n^{e_{\pi(n)}}$ vorkommen.

Um die Formeln übersichtlich zu halten, schreiben wir im folgenden kurz σ_i an Stelle von $\sigma_i(X_1, \dots, X_n)$. Die Beweisstrategie besteht darin, nacheinander alle Terme von f zu eliminieren durch Subtraktion eines Produkts elementarsymmetrischer Polynome, wobei in jedem Schritt das graduiert lexikographisch größte unter den noch verbliebenen Monomen eliminiert wird.

Zur Konstruktion eines Produkt elementarsymmetrischer Polynome mit führendem Monom $X_1^{e_1} \cdots X_n^{e_n}$ beachten wir, daß das führende Monom von σ_i gleich $X_1 \cdots X_i$ ist. Wir betrachten nur Monome, deren Exponenten die Ungleichungen $e_1 \geq \cdots \geq e_n$ erfüllen. Dann sind $\delta_i = e_i - e_{i+1}$ für $i = 1, \dots, n-1$ und $\delta_n = e_n$ größer oder gleich Null, und $\sigma_1^{\delta_1} \cdots \sigma_n^{\delta_n}$ hat das führende Monom $X_1^{e_1} \cdots X_n^{e_n}$, da e_i gleich der Summe $\delta_i + \cdots + \delta_n$ ist.

Ist daher $aX_1^{e_1} \cdots X_n^{e_n}$ der führende Term von f, so heben sich in der Differenz $f_1 = f - a\sigma_1^{\delta_1} \cdots \sigma_n^{\delta_n}$ die führenden Terme weg, und f_1 hat ein führendes Monom, das kleiner ist als $X_1^{e_1} \cdots X_n^{e_n}$. Als Differenz zweier symmetrischer Polynome ist auch f_1 wieder symmetrisch. Wir schreiben $f = a\sigma_1^{\delta_1} \cdots \sigma_n^{\delta_n} + f_1$, wenden die gleiche Konstruktion an auf f_1, und so weiter. Da die führenden Monome dabei immer kleiner werden und es nur endlich viele Monome gibt, die graduiert lexikographisch kleiner sind als ein gegebenes Monom, endet diese Konstruktion nach endlich vielen Schritten und drückt f aus als Linearkombination von Monomen in den σ_i. Das gesuchte Polynom g ist nun einfach die entsprechende Linearkombination mit Monomen in den Y_i an Stelle der σ_i. ■

Als Beispiel betrachten wir das symmetrische Polynom $f = X^3Y + XY^3$. Der führende Term ist X^3Y, wir haben also $e_1 = 3$ und $e_2 = 1$. Damit ist $\delta_1 = 2$ und $\delta_2 = 1$; wir subtrahieren daher im ersten Schritt

$$\sigma_1^{\delta_1}\sigma_2^{\delta_2} = (X+Y)^2(XY) = X^3Y + 2X^2Y^2 + XY^3 .$$

Übrig bleibt

$$f_1 = f - (X^3Y + 2X^2Y^2 + XY^3) = -2X^2Y^2 .$$

Da es nur ein Monom gibt, ist dieses führend; wir haben $e_1 = e_2 = 2$, also $\delta_1 = 0$ und $\delta_2 = 2$. Daher subtrahieren wir $-2\sigma_2^2$ und erhalten

$$f_2 = f_1 + 2(XY)^2 = 0 .$$

Somit ist

$$f = \sigma_1^2\sigma_2 + f_1 = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 + f_2 = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 .$$

Kombinieren wir den gerade bewiesenen Satz mit dem Wurzelsatz von VIÈTE, besagt er, daß sich jedes symmetrische Polynom in den Nullstellen eines Polynoms als Polynom in den Koeffizienten schreiben läßt:

Satz: P sei ein symmetrisches Polynom in $z_1, \dots, z_n$, und für jedes n-tupel $z = (z_1, \dots, z_n)$ sei

$$f^{(z)} = (X - z_1)\cdots(X - z_n) = X^n + a_{n-1}^{(z)}X^{n-1} + \cdots + a_1^{(z)}X + a_0^{(z)} .$$

Dann gibt es ein Polynom Q in neuen Variablen $A_0, \dots, A_{n-1}$ mit der Eigenschaft, daß für alle n-tupel $z = (z_1, \dots, z_n)$ gilt:

$$P(z) = Q\left(a_0^{(z)}, \dots, a_{n-1}^{(z)}\right) .$$

■

§8: Die Diskriminante eines Polynoms

Die Lösungsformel
$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$
für eine quadratische Gleichung führt genau dann auf zwei verschiedene Lösungen, wenn der Ausdruck unter der Wurzel nicht verschwindet. Man bezeichnet $\Delta = p^2 - 4q$ als die *Diskriminante* der Gleichung. Wir wollen in diesem Paragraphen auch für Gleichungen höheren Grades eine entsprechende Größe einführen; sie soll genau dann verschwinden, wenn die Gleichung mindestens eine mehrfache Nullstelle hat.

Für ein Polynom, das bereits als Produkt von Linearfaktoren vorliegt, läßt sich so eine Diskriminante leicht konstruieren:

Definition: Die Diskriminante des Polynoms $(X - x_1) \cdots (X - x_n)$ ist
$$\Delta \underset{\text{def}}{=} \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2 .$$

Für die quadratische Gleichung führt dies auf
$$(x_1 - x_2)^2 = \left(-\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} - \left(-\frac{p}{2} - \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} \right) \right)^2 = p^2 - 4q$$
wie oben.

Dadurch, daß die Differenzen der Nullstellen in obiger Definition quadriert werden, ist die Diskriminante unabhängig von der Reihenfolge der Nullstellen – was sie natürlich sinnvollerweise ohnehin sein muß. Sie ist daher eine symmetrische Funktion der Nullstellen und läßt sich als Polynom in den elementarsymmetrischen Funktionen und damit in den Koeffizienten des Polynoms schreiben.

Für das kubische Polynom $(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$ ist
$$\begin{aligned}\Delta &= (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 \\ &= x_1^4 x_2^2 - 2x_1^4 x_2 x_3 + x_1^4 x_3^2 - 2x_1^3 x_2^3 + 2x_1^3 x_2^2 x_3 + 2x_1^3 x_2 x_3^2 - 2x_1^3 x_3^3 \\ &\quad + x_1^2 x_2^4 + 2x_1^2 x_2^3 x_3 - 6x_1^2 x_2^2 x_3^2 + 2x_1^2 x_2 x_3^3 + x_1^2 x_3^4 \\ &\quad - 2x_1 x_2^4 x_3 + 2x_1 x_2^3 x_3^2 + 2x_1 x_2^2 x_3^3 - 2x_1 x_2 x_3^4 + x_2^4 x_3^2 - 2x_2^3 x_3^3 + x_2^2 x_3^4\end{aligned}$$

fast zu grausam, um damit weiter zu rechnen. Da wir immer von der Gleichung X^3+pX+q ausgehen, müssen wir das zum Glück auch nicht: Nach dem Satz von VIÈTE ist die Summe der drei Nullstellen gleich dem negativen Koeffizienten von X^2, und da wir keinen X^2-Term haben, ist diese Summe Null, d.h. $x_3 = -x_1 - x_2$. Damit ist

$$\Delta = (x_1 - x_2)^2(2x_1 + x_2)^2(2x_2 + x_1)^2$$
$$= 4x_1^6 + 12x_1^5x_2 - 3x_1^4x_2^2 - 26x_1^3x_2^3 - 3x_1^2x_2^4 + 12x_1x_2^5 + 4x_2^6$$

Nach dem Wurzelsatz von VIÈTE ist

$$p = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1x_2 - x_1(x_1 + x_2) - x_2(x_1 + x_2)$$
$$= x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2 = -x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$$

und $q = -x_1x_2x_3 = x_1x_2(x_1 + x_2) = x_1^2x_2 + x_1x_2^2$.

Wir gehen nun vor wie im Beweis des Hauptsatzes über symmetrische Funktionen: Um im Ausdruck für die Diskriminante den führenden Term $4x_1^6$ zum Verschwinden zu bringen, addieren wir $4p^3$ und erhalten (nach mühsamer Rechnung) das Ergebnis

$$\Delta + 4p^3 = -27x_1^4x_2^2 - 54x_1^3x_2^3 - 27x_1^2x_2^4 \,;$$

addieren wir dazu noch $27q^2$, wird $\Delta+4p^3+27q^2 = 0$. Die Diskriminante des Polynoms $X^3 + pX + q$ ist also $\Delta = -(4p^3 + 27q^2)$. Das kubische Polynom $X^3 + pX + q$ hat somit genau dann eine mehrfache Nullstelle, wenn $\Delta = -(4p^3 + 27q^2)$ verschwindet.

§9: Der casus irreducibilis bei kubischen Gleichungen

Falls alle drei Nullstellen des kubischen Polynoms X^3+pX+q mit reellen Koeffizienten p, q reell und verschieden sind, ist die Diskriminante als Produkt von Quadraten reeller Zahlen positiv. In

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,,$$

ist daher

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{27q^2 + 4p^3}{108} = \frac{-\Delta}{108}$$

negativ. In diesem Fall steht somit unter der Quadratwurzel eine negative Zahl, so daß u^3 einen nichtverschwindenden Imaginärteil hat. *Falls alle drei Nullstellen reell und verschieden sind, muß also u eine nichtreelle komplexe Zahl sein.* Man bezeichnet diesen Fall aus diesem Grund als den *casus irreducibilis.* Mit der Irreduzibilität von Polynomen, die wir bald betrachten werden, hat dies nichts zu tun.

Wir wollen uns überlegen, daß umgekehrt im Falle einer positiven Diskriminanten bei reellen Koeffizienten auch alle drei Lösungen reell sein müssen. Dazu machen wir einen trigonometrischen Ansatz, mit dem wir sie ohne Umweg über die komplexen Zahlen rein reell bestimmen können.

Wir schreiben $x = r\cos\varphi$ mit einer nichtnegativen Zahl r und einem Winkel φ zwischen 0 und π. (Da der Kosinus eine gerade Funktion ist, können wir uns auf nichtnegative Winkel beschränken.) Die kubische Gleichung wird dann zu

$$x^3 + px + q = r^3\cos^3\varphi + pr\cos\varphi + q = 0\,.$$

Nach den EULERschen Formeln ist

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = (e^{i\varphi})^3 = e^{3i\varphi} = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi\,.$$

Andererseits ist nach dem binomischen Lehrsatz

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi\,;$$

durch Vergleich der Realteile sehen wir, daß

$$\begin{aligned}\cos 3\varphi &= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\cdot(1-\cos^2\varphi)\\ &= 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\end{aligned}$$

ist und damit $\cos^3\varphi = \dfrac{\cos 3\varphi + 3\cos\varphi}{4}$.

Die Gleichung wird damit zu

$$\begin{aligned}&\frac{r^3}{4}(\cos 3\varphi + 3\cos\varphi) + pr\cos\varphi + q\\ &= \frac{r^3}{4}\cos 3\varphi + r\cdot\left(\frac{3}{4}r^2 + p\right)\cos\varphi + q = 0\,.\end{aligned}$$

Wir können sie vereinfachen, wenn wir r so wählen, daß die Klammer verschwindet: Mit $r = \sqrt{-4p/3}$ erhalten wir

$$\frac{r^3}{4}\cos 3\varphi + q = 0$$

und damit $\cos 3\varphi = -\dfrac{4q}{r^3} = -4q\sqrt{-\dfrac{27}{4^3p^3}} = -\dfrac{q}{2}\sqrt{\dfrac{-27}{p^3}}$.

r ist eine reelle Zahl, denn da $-\Delta = 4p^3 + 27q^2 < 0$ ist und $q^2 \geq 0$, muß p negativ sein. Außerdem hat der Ausdruck für $\cos 3\varphi$ höchstens den Betrag eins, denn sein Quadrat ist

$$\frac{q^2}{4}\cdot\frac{-27}{p^3} = \frac{27q^2}{-4p^3}\ ,$$

wobei hier im Nenner eine positive und im Zähler zumindest eine nichtnegative Zahl steht. Wegen $\Delta < 0$ ist $27q^2 < -4p^3$, also hat der Bruch einen Wert zwischen 0 und 1, und obiger Ausdruck liegt zwischen -1 und 1. Somit können wir einen Winkel φ aus $[0, \pi]$ finden mit $\cos 3\varphi = -q/2\sqrt{-27/p^3}$.

Tatsächlich finden wir dann nicht nur einen Winkel, sondern drei, denn $\cos 3\varphi$ nimmt im Intervall $[0, \pi]$ jeden Wert aus $[-1, 1]$ dreimal an: Ist $\varphi_1 \in [0, \frac{1}{3}\pi]$ der kleinste solche Winkel, sind $\varphi_{2/3} = \frac{2}{3}\pi \pm \varphi_1$ die beiden anderen. Die drei Lösungen der gegebenen Gleichung sind also

$$x_i = r\cos\varphi_i = \sqrt{\frac{-4p}{3}}\cos\varphi_i \quad \text{mit} \quad \cos 3\varphi_i = -\frac{q}{2}\sqrt{\frac{-27}{p^3}}\ ,$$

und sie sind allesamt reell.

Man beachte, daß wir hier nicht nur Grundrechenarten und Wurzeln verwenden, um die x_i auszudrücken: Um die Winkel φ_i zu bestimmen, brauchen wir den Arkuskosinus und zur Berechnung der x_i zusätzlich noch den Kosinus.