

Kapitel 0

Was ist Algebra?

Die Zahlentheorie beschäftigt sich mit den (ganzen) Zahlen, die Geometrie von γεωμετρία mit dem Messen der Erde, aber woher kommt das Wort Algebra?

Um 830 legte der arabische Gelehrte ABU DSCHA'FAR MUḤAMMAD IBN MŪSĀ AL-CHWĀRIZMĪ sein zweites Buch *Al-Kitāb al-muchtasar fi hisab al-dschabr wa-'l-muqābala* oder kurz *Kitāb al-dschabr wa-'l-muqābala* vor; *al-dschabr* gab der Algebra ihren Namen, und der Autorenname AL-CHWĀRIZMĪ führte zum Wort Algorithmus. In deutscher Übersetzung heißt der volle Titel etwa *Kurzgefaßtes Buch über das Rechnen durch Ergänzen und Ausgleichen*. *Al-dschabr*, das Ergänzen oder Vervollständigen, besteht darin, negative Terme in einer Gleichung auf die andere Seite zu bringen; in einem Beispiel aus dem Buch wird etwa aus (in moderner Schreibweise) $x^2 = 40x - 4x^2$ durch *al-dschabr* die Gleichung $5x^2 = 40x$. *Al-muqābala*, das Ausgleichen, besteht darin, von zwei positiven Termen auf den beiden Seiten der Gleichung den einen auf Null zu reduzieren; aus $x^2 + 3x + 5 = 7x + 2$ wird also zunächst $x^2 + 5 = 4x + 2$ und dann $x^2 + 3 = 4x$.

ABU DSCHA'FAR MUḤAMMAD IBN MŪSĀ AL-CHWĀRIZMĪ wurde um 780 geboren und arbeitete die meiste Zeit seines Lebens in Bagdad, insbesondere auch im *Haus der Weisheit*, das AL-MA'MŪM, der siebte Kalif, als wissenschaftliches Zentrum seines Reichs gegründet hatte. Eine der Aufgaben dieses Zentrums bestand darin, Texte klassischer griechischer Wissenschaftler ins Arabische zu übersetzen; viele Texte sind heute nur noch über diese Übersetzungen bekannt. Arbeitsgebiete am *Haus der Weisheit* waren vor allem Mathematik und Astronomie. Außer einem weiteren mathematischen Buch, das sich mit den indischen Ziffern befaßte, schrieb AL-CHWĀRIZMĪ auch Bücher über Geographie und Kartographie.

Aus heutiger Sicht besteht kaum ein Unterschied zwischen *al-dschabr*

und *al-muqābala*; wir sagen einfach, daß wir einen Term auf die andere Seite bringen. Demnach ist Algebra also die Lehre vom auf die andere Seite bringen. Im neunten Jahrhundert waren die beiden Methoden noch grundverschieden, denn negative Zahlen begannen außerhalb Indiens erst im 16. Jahrhundert langsam in der Mathematik aufzutauchen. Auch die Null fing gerade erst an verwendet zu werden; davon handelt AL-CHWĀRIZMĪs erstes Buch, in dem er die indische Zahlenschrift in die arabische Welt brachte. Die Null wurde aber nicht als *Zahl* eingeführt, sondern nur als *Ziffer*. Dieses Wort kommt vom arabischen Wort für Null *ṣifr*, was von *ṣafira* = *leer sein* kommt, und das wiederum kommt vom Sanskrit-Wort *śūnya*, das Nichts oder die Leere.

In heutiger Sprechweise ist der Gegenstand des Buchs von AL-CHWĀRIZMĪ die Lösung linearer und quadratischer Gleichungen. Quadrate der Unbekannten kommen in seinen Gleichungen entweder gar nicht oder ohne Koeffizient (d.h. mit Koeffizient eins) vor; lineare und konstante Terme können auf beiden Seiten mit positiven Koeffizienten stehen, können aber auch fehlen. Da es die Null als Zahl noch nicht gab, konnte sie auch auf keiner der beiden Seiten stehen.

Unter diesen Randbedingungen entstehen Gleichungen, die sich durch *al-dschabr* und *al-muqābala* auf eine der folgenden sechs Normalformen bringen lassen:

$$x^2 = px, \quad x^2 = q, \quad px = q, \quad x^2 + px = q, \quad x^2 + q = px \quad \text{und} \quad x^2 = px + q,$$

wobei p und q natürlich positive Zahlen sein müssen. Vom Lösen dieser sechs Typen von Gleichungen handelt das Buch. AL-CHWĀRIZMĪ benutzt dabei häufig eine geometrische Sprechweise und veranschaulicht seine Vorgehensweise auch geometrisch.

Die nach *al-dschabr* benannte Algebra befaßte sich somit traditionell mit dem Lösen von Gleichungen. Erst im neunzehnten Jahrhundert begann man sich auch für in diesem Zusammenhang auftretende strukturelle Fragen zu interessieren. Was wir heute als *abstrakte Algebra* bezeichnen, geht größtenteils erst auf den Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts zurück.