

9. Dezember 2020

11. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: (8 Punkte)

Bestimmen Sie für jede der folgenden Gruppen deren Zentrum:

- a) \mathfrak{A}_5 b) \mathfrak{S}_5 c) D_3 d) V_4 e) $GL_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \det A \neq 0\}$
f) Zeigen Sie: Für zwei Gruppen G und H ist $Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$!

Aufgabe 2: (5 Punkte)

- a) Zeigen Sie: Ein Winkel α kann genau dann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, wenn eine Strecke der Länge $\cos \alpha$ mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann.
b) Wir betrachten α als Variable und definieren die Körper $K = \mathbb{Q}(\cos \alpha)$ und $L = \mathbb{Q}(\cos \frac{\alpha}{3})$. Zeigen Sie, daß L/K eine algebraische Erweiterung ist, und bestimmen Sie deren Grad!

Aufgabe 3: (7 Punkte)

Zu den in der klassischen griechischen Mathematik betrachteten Konstruktionen, die nicht mit Zirkel und Lineal ausgeführt wurden, zählt die sogenannte *Quadratrix* oder *Trisektrix*. Zu ihrer Konstruktion bewegt sich eine zur x -Achse parallele Gerade g mit konstanter Geschwindigkeit von der Höhe $y = 1$ auf die Höhe $y = 0$. Gleichzeitig bewegt sich eine Gerade h durch den Nullpunkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit vom Steigungswinkel 90° zum Steigungswinkel 0° so, daß beide Geraden gleichzeitig ihre Endposition erreichen. Die Quadratrix ist die Menge aller Punkte, in denen sich die beiden Geraden auf ihrem Weg schneiden.

- a) Zeigen Sie: Diese Kurve hat, wenn man von den Endpunkten absieht, die Parameterdarstellung

$$\varphi: \begin{cases} (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \left(\frac{1-t}{\tan \frac{\pi}{2}(1-t)}, 1-t \right) \end{cases}$$

- b) Bestimmen Sie $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t)$ und $\lim_{t \rightarrow 1} \varphi(t)$!
c) Zeigen Sie, daß mit Hilfe dieser Kurve ein Quadrat konstruiert werden kann, dessen Fläche gleich derer des Einheitskreises ist!
d) Zeigen Sie, daß mit Hilfe dieser Kurve für jede natürliche Zahl n und jeden vorgegebenen Winkel α der Winkel $\frac{1}{n}\alpha$ konstruiert werden kann!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 15. Dezember 2020, um 15.20 Uhr