Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 B6, B4.18

11. November 2020

7. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

I sei das von $f = X^2 + 2X + 2$ erzeugte Hauptideal in $R = \mathbb{Q}[X]$.

a) Zeigen Sie, daß f irreduzibel ist!

b) Zeigen Sie, daß jede Nebenklasse $\overline{g} = g + I \in R/I$ genau ein Polynom der Form $aX + b$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ enthält!

c) Für die Nebenklassen $\overline{g}_1$ und $\overline{g}_2$ seien dies die Polynome $a_1X + b_1$ und $a_2X + b_2$. Finden Sie die entsprechenden Polynome für die Nebenklassen $\overline{g}_1 + \overline{g}_2$ und $\overline{g}_1 \cdot \overline{g}_2$!

d) Ist R/I ein Integritätsbereich?

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

a) Wie viele Elemente enthält die Gruppe $G = (\mathbb{Z}/16)^\times$?

b) Bestimmen Sie die Ordnungen aller Elemente von G !

c) Finden Sie Elemente $a, b \in G$ derart, daß die Abbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \to (\mathbb{Z}/16)^\times \\ (n, m) \mapsto a^n \cdot b^m \end{cases}$$

ein Gruppenisomorphismus ist!

d) Folgern Sie, daß $a^4 \equiv 1 \bmod 16$ für jede ungerade ganze Zahl a !

e) Gilt auch, daß $a^5 \equiv a \bmod 16$ für *alle* $a \in \mathbb{Z}$?

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) G und H seien zwei Gruppen mit Neutralelementen e_G und e_H. Zeigen Sie, daß die Teilmengen $N_1 = G \times \{e_H\}$ und $N_2 = \{e_G\} \times H$ Normalteiler von $G \oplus H$ sind und daß es zu jedem Element $x \in G \oplus H$ eindeutig bestimmte Elemente $n_1 \in N_1$ und $n_2 \in N_2$ gibt mit $x = n_1n_2 = n_2n_1$!

b) Eine Gruppe G habe zwei Normalteiler N_1, N_2 mit der Eigenschaft, daß $N_1 \cap N_2$ eine einelementige Menge ist und es zu jedem $x \in G$ eindeutig bestimmte Elemente $n_1 \in N_1$ und $n_2 \in N_2$ gibt mit $x = n_1n_2 = n_2n_1$. Zeigen Sie, daß $G \cong N_1 \oplus N_2$ ist!

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

a) Wie viele Elemente hat die Gruppe $G = (\mathbb{Z}/105)^\times$?

b) Zeigen Sie, daß $(\mathbb{Z}/105)^\times \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/6$ ist!

c) Ist $(\mathbb{Z}/105)^\times$ zyklisch?

Abgabe bis zum Dienstag, dem 17. November 2020, um 15.20 Uhr