WOLFGANG K. SEILER
*Tel.* 2515

B6, B4.18

*4. November 2020*

# 6. Übungsblatt Algebra

**Aufgabe 1:** *(10 Punkte)*

Wir betrachten $R = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

*a)* Zeigen Sie, daß R bezüglich der Addition und Multiplikation komplexer Zahlen ein kommutativer Ring ist!

*b)* Ist R ein Integritätsbereich?

*c)* Zeigen Sie, daß jede Einheit in R den Betrag eins hat und bestimmen Sie die Menge aller Einheiten!

*d)* Ist $R^\times$ eine zyklische Gruppe?

*e)* Welche der folgenden Teilmengen von R ist ein Ideal? Beweisen Sie entweder, daß es sich um ein Ideal handelt, oder zeigen Sie mit einem Gegenbeispiel, daß eine der Forderungen an ein Ideal verletzt ist!

$I_1 = \{a + bi \in R \mid a \equiv 0 \bmod 2\}$, $\quad I_2 = \{a + bi \in R \mid b \equiv 0 \bmod 2\}$,
$I_3 = \{a + bi \in R \mid a \equiv b \equiv 0 \bmod 2\}$, $\quad I_4 = \{a + bi \in R \mid a^2 + b^2 \equiv 0 \bmod 2\}$,
$I_5 = \{a + bi \in R \mid b = 0\}$, $\quad I_6 = \{a + bi \in R \mid a + b = 0\}$

*f)* Welche der Ideale unter diesen Mengen sind Hauptideale?

**Aufgabe 2:** *(4 Punkte)*

Nun sei $R = \mathbb{Z}/10$.

*a)* Bestimmen Sie alle Nullstellen in R der Polynome $f = 2X + 5$ und $g = 5X + 2$ aus $R[X]$ !

*b)* Berechnen Sie das Produkt $fg \in R[X]$ und dessen Nullstellen!

*c)* Bestimmen Sie auch für $p = 3X + 5$ und $q = 7X + 2$ aus $R[X]$ alle Nullstellen von $p, q$ und $pq$ in R !

**Aufgabe 3:** *(6 Punkte)*

*a)* $f = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ sei ein primitives Polynom und p sei eine Primzahl, die alle $a_i$ außer $a_n$ teilt und deren Quadrat kein Teiler von $a_0$ ist. (Ein solches Polynom heißt p-EISENSTEINsch.) Zeigen Sie, daß f irreduzibel ist!
*Hinweis:* Sie können ähnlich vorgehen wie beim Beweis, daß das Produkt zweier primitiver Polynome wieder primitiv ist.

*b)* Zeigen Sie: Ein Polynom $f = f(X) \in R[X]$ über einem Integritätsbereich R ist genau dann irreduzibel, wenn das Polynom $f(X + 1)$ irreduzibel ist.

*c)* Schreiben Sie $f = \dfrac{X^p - 1}{X - 1}$ als Polynom, und folgern Sie aus *a)* und *b)*, daß dieses für prime p irreduzibel ist!

**Abgabe** bis zum Dienstag, dem 10. November 2020, um 15.20 Uhr