

28. Oktober 2020

## 5. Übungsblatt Algebra

### Aufgabe 1: (5 Punkte)

Zeigen Sie:

- a) Eine Gruppe  $G$  ist genau dann abelsch, wenn für jedes Element  $g \in G$  die Konjugationsabbildung  $x \mapsto x^g$  gleich der identischen Abbildung ist.

**Lösung:** Eine Gruppe ist genau dann abelsch, wenn für alle  $x, g \in G$  gilt  $xg = gx$ . Durch Multiplikation mit  $g^{-1}$  von links sieht man, daß diese Gleichung äquivalent ist zu  $x^g = g^{-1}xg = x$ .

- b)  $G$  ist genau dann abelsch, wenn für je zwei Elemente  $x, y$  von  $G$  deren Kommutator  $[x, y] \stackrel{\text{def}}{=} x^{-1}y^{-1}xy$  gleich dem Neutralelement  $e$  ist.

**Lösung:** Nach a) ist  $G$  genau dann abelsch, wenn  $x^y = y^{-1}xy = x$  ist für alle  $x, y \in G$ . Multiplikation von links mit  $x^{-1}$  macht daraus die Gleichung

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x = e.$$

- c) Eine Gruppe mit  $x^2 = e$  für alle  $x \in G$  ist abelsch.

**Lösung:** Ist  $x^2 = e$  für alle  $x \in G$ , so ist auch  $x^{-1} = x$  für alle  $x \in G$ . Für zwei Elemente  $x, y \in G$  ist daher

$$e = (xy)^2 = xyxy = x^{-1}y^{-1}xy = [x, y],$$

was nach b) zeigt, daß  $G$  abelsch ist.

- d) Jede endliche Gruppe mit gerader Ordnung enthält mindestens ein Element  $g \neq e$  mit  $g^2 = e$ . *Hinweis: Zeigen Sie, daß  $\{x \in G \mid x \neq x^{-1}\}$  eine gerade Elementanzahl hat.*

**Lösung:**  $\{x \in G \mid x \neq x^{-1}\}$  ist die disjunkte Vereinigung zweielementiger Mengen  $\{x, x^{-1}\}$  und hat daher eine gerade Anzahl von Elementen. Falls auch die Gruppenordnung gerade ist, hat auch das Komplement dieser Menge eine gerade Elementanzahl. Da es auf jeden Fall das Neutralelement enthält, muß es dort noch mindestens ein weiteres Element  $g$  geben mit  $g^{-1} = g$  und damit  $g^2 = e$ .

- e) Für  $n$  Elemente  $x_1, \dots, x_n$  einer abelschen Gruppe  $G$  und eine beliebige Permutation  $\pi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  ist  $\prod_{i=1}^n x_i = \prod_{i=1}^n x_{\pi(i)}$ .

**Lösung:** Beweis durch vollständige Induktion: Für  $n = 1$  gibt es nichts zu beweisen; sei also  $n > 1$ . Falls  $\pi(n) = n$  sein sollte, wissen wir, daß nach Induktionsannahme

$$\prod_{i=1}^{n-1} x_i = \prod_{i=1}^{n-1} x_{\pi(i)}$$

ist, und wegen  $\pi(n) = n$  ist dann auch

$$\prod_{i=1}^n x_i = \prod_{i=1}^n x_{\pi(i)}.$$

Falls  $\pi(n) < n$  ist, läßt sich  $x_{\pi(n)}$  schrittweise durch Anwendung des Kommutativgesetzes via

$$x_{\pi(n)}x_{\pi(n)+1} = x_{\pi(n)+1}x_{\pi(n)}, \quad x_{\pi(n)}x_{\pi(n)+2} = x_{\pi(n)+1}x_{\pi(n)},$$

und so weiter an die letzte Stelle bringen, ohne den Wert des Produktes zu ändern. Damit ist ein Produkt mit einer neuen Permutation  $\omega$  entstanden, für die  $\omega(n) = n$  ist, und für die gilt die Behauptung.

### Aufgabe 2: (3 Punkte)

Zeigen Sie, daß eine nichtleere Menge  $G$  mit einer assoziativen Verknüpfung  $*$ :  $G \times G \rightarrow G$  genau dann eine Gruppe ist, wenn für je zwei Elemente  $a, b \in G$  sowohl die Gleichung  $a * x = b$  als auch die Gleichung  $y * a = b$  in  $G$  lösbar ist! *Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß es zu einem festen  $a \in G$  ein  $e \in G$  gibt mit  $e * a = a$  und folgern Sie dann, daß  $e * x = x$  für alle  $x \in G$ . Sie können die in der Vorlesung erwähnte und im Skriptum bewiesene Tatsache benutzen, daß man in der Gruppensdefinition nicht alle geforderten Gleichungen braucht.*

**Lösung:** Zunächst sei  $G$  eine nichtleere Menge mit einer assoziativen Verknüpfung  $*$  derart, daß die Gleichungen  $a * x = b$  und  $y * a = b$  stets lösbar sind.

Da  $G$  nicht leer ist, gibt es mindestens ein Element  $a \in G$ , und die Gleichung  $x * a = a$  hat eine Lösung  $e$ . Für jedes weitere Element  $g \in G$  hat die Gleichung  $a * x = g$  eine Lösung, und  $(e * a) * x$  ist einerseits gleich  $e * (a * x) = e * g$ , andererseits gleich  $a * x = g$ , so daß auch  $e * g = g$  ist. Somit ist  $e * x = x$  für alle  $x \in G$ .

Für jedes  $a \in G$  hat auch die Gleichung  $y * a = e$  eine Lösung, es gibt also zu jedem  $a \in G$  ein  $a' \in G$  mit  $a' * a = e$ . Das Assoziativgesetz ist nach Voraussetzung erfüllt.

Wie im Skriptum gezeigt wurde, reicht dies um zu zeigen, daß  $G$  eine Gruppe ist.

Ist umgekehrt  $G$  eine Gruppe, so ist natürlich  $x = a^{-1} * b$  eine Lösung von  $a * x = b$  und  $y = b * a^{-1}$  eine Lösung von  $y * a = b$ .

### Aufgabe 3: (4 Punkte)

$G = \mathfrak{S}_3$  sei die Menge aller Permutationen  $\pi: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ .

- a) Bestimmen Sie für die von der Transposition  $\tau = (1\ 2)$  erzeugte zyklische Untergruppe die Rechts- und die Linksnebenklassen, und bestimmen Sie für jedes Element von  $\mathfrak{S}_3$  sein Bild unter der Konjugation mit  $\tau$ !

**Lösung:** Für die Verknüpfung von Permutationen richten wir uns nach der Konvention, daß die Abbildungen – wie aus der Analysis gewohnt – in der Reihenfolge von rechts nach links angewendet werden.

Die Links- wie auch die Rechtsnebenklasse der Identität besteht aus dieser selbst und aus  $\tau = (1\ 2)$ .

Die Linksnebenklasse der Transposition  $(1\ 3)$  enthält außer dieser Transposition noch den Zyklus  $(1\ 3)(1\ 2) = (1\ 2\ 3)$ ; die von  $(2\ 3)$  enthält noch  $(1\ 3\ 2)$ . Damit sind alle drei Linksnebenklassen gefunden.

Bei den Rechtsnebenklassen müssen wir die Reihenfolge der Faktoren vertauschen: Die von  $(1\ 3)$  enthält noch  $(1\ 2)(1\ 3) = (1\ 3\ 2)$ , und die von  $(2\ 3)$  noch  $(1\ 2)(2\ 3) = (1\ 2\ 3)$ .

Die Konjugation mit  $(1\ 2)$  bildet natürlich sowohl die Identität als auch  $(1\ 2)$  auf sich selbst ab. Ansonsten ist

$$\begin{aligned} (1\ 3)^{(1\ 2)} &= (1\ 2)(1\ 3)(1\ 2) = (2\ 3) \\ (2\ 3)^{(1\ 2)} &= (1\ 2)(2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3) \\ (1\ 2\ 3)^{(1\ 2)} &= (1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3\ 2) \\ (1\ 3\ 2)^{(1\ 2)} &= (1\ 2)(1\ 3\ 2)(1\ 2) = (1\ 2\ 3) \end{aligned}$$

- b) Bestimmen für die vom Dreierzyklus  $\pi = (1\ 2\ 3)$  erzeugte zyklische Untergruppe die Rechts- und die Linksnebenklassen, und bestimmen Sie für jedes Element von  $\mathfrak{S}_3$  sein Bild unter der Konjugation mit  $\pi$ !

**Lösung:** Da diese Untergruppe Index zwei hat, sind die Nebenklassen, egal ob links oder rechts, einfach gleich der Untergruppe und ihrem Komplement, also

$$\{\text{id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \quad \text{und} \quad \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}.$$

Die Konjugation mit  $\pi$  bildet wieder die Identität und  $\pi$  auf sich selbst ab; die Bilder der übrigen Permutationen sind

$$\begin{aligned} (1\ 2)^{(1\ 2\ 3)} &= (3\ 2\ 1)(1\ 2)(1\ 2\ 3) = (1\ 3) \\ (1\ 3)^{(1\ 2\ 3)} &= (3\ 2\ 1)(1\ 3)(1\ 2\ 3) = (2\ 3) \\ (2\ 3)^{(1\ 2\ 3)} &= (3\ 2\ 1)(2\ 3)(1\ 2\ 3) = (1\ 2) \\ (3\ 2\ 1)^{(1\ 2\ 3)} &= (3\ 2\ 1)(3\ 2\ 1)(1\ 2\ 3) = (1\ 3\ 2) \end{aligned}$$

**Aufgabe 4:** (4 Punkte)

Zeigen Sie:

- a) Eine Teilmenge  $U \subseteq G$  einer Gruppe  $G$  ist genau dann eine Untergruppe, wenn sie nicht leer ist und wenn für alle  $x, y \in U$  auch  $xy^{-1}$  in  $U$  liegt.

**Lösung:** Falls  $U$  eine Untergruppe ist, enthält sie das Neutralelement, ist also nicht leer, und mit  $x, y$  muß sie auch  $xy^{-1}$  enthalten. Ist umgekehrt  $U$  nicht leer, so gibt es ein  $x \in U$ , und  $U$  enthält dazu das Element  $e = xx^{-1}$ . Damit enthält  $U$  auch zu jedem  $y \in U$  das Inverse  $y^{-1} = ey^{-1}$ , und zu  $x, y \in U$  auch  $xy = x(y^{-1})^{-1}$ .

- b) Eine endliche Teilmenge  $U \subseteq G$  einer Gruppe  $G$  ist genau dann eine Untergruppe, wenn sie nicht leer ist und wenn  $UU \subseteq U$  gilt.

**Lösung:** Falls  $U$  eine Untergruppe ist, muß natürlich  $UU \subseteq U$  sein. Umgekehrt ist für jedes  $h \in U$  die Abbildung  $U \rightarrow G; x \mapsto xh$  injektiv. Wegen der Bedingung  $UU \subseteq U$  bildet sie  $U$  nach  $U$  ab, und da  $U$  endlich ist, folgt aus der Injektivität dieser Abbildung von  $U$  nach  $U$  die Surjektivität. Für jedes  $g \in U$  gibt es also ein  $x \in U$  mit  $xh = g$ , d.h.  $x = gh^{-1} \in U$ , so daß  $U$  nach a) eine Untergruppe ist.

**Aufgabe 5:** (4 Punkte)

- a)  $G$  sei eine Gruppe, und  $\text{Aut } G$  sei die Menge aller Automorphismen  $\varphi: G \rightarrow G$ . Zeigen Sie, daß  $\text{Aut } G$  bezüglich der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine Gruppe ist!

**Lösung:** Sind  $\varphi, \psi: G \rightarrow G$  Automorphismen, so ist auch  $\varphi \circ \psi$  einer, denn die Hintereinanderausführung zweier Homomorphismen ist ein Homomorphismus, und die zweier bijektiver Abbildungen ist wieder bijektiv.

Die Hintereinanderausführung von Abbildungen ist stets assoziativ.

Die Identität ist ein Automorphismus, und zu jedem Automorphismus ist auch die Umkehrabbildung einer. Somit sind alle Gruppenaxiome erfüllt.

- b) Zeigen Sie, daß die inneren Automorphismen eine Untergruppe von  $\text{Aut } G$  bilden!

**Lösung:** Die Identität als Konjugation mit dem Neutralelement ist ein innerer Automorphismus. Für zwei Elemente  $a, b \in G$  und jedes  $x \in G$  ist

$$(x^a)^b = b^{-1}x^ab = b^{-1}a^{-1}xab = (ab)^{-1}x(ab) = x^{ab},$$

so daß die Hintereinanderausführung zweier innerer Automorphismen wieder einer ist. Schließlich ist noch die Konjugation mit  $a^{-1}$  invers zur Konjugation mit  $a$ .