WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

B6, B4.18

28. Oktober 2020

5. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

Zeigen Sie:

a) Eine Gruppe G ist genau dann abelsch, wenn für jedes Element $g \in G$ die Konjugationsabbildung $x \mapsto x^g$ gleich der identischen Abbildung ist.

b) G ist genau dann abelsch, wenn für je zwei Elemente x, y von G deren Kommutator $[x, y] \underset{\text{def}}{=} x^{-1}y^{-1}xy$ gleich dem Neutralelement e ist.

c) Eine Gruppe mit $x^2 = e$ für alle $x \in G$ ist abelsch.

d) Jede endliche Gruppe mit gerader Ordnung enthält mindestens ein Element $g \neq e$ mit $g^2 = e$. *Hinweis: Zeigen Sie, daß* $\{x \in G \mid x \neq x^{-1}\}$ *eine gerade Elementanzahl hat.*

e) Für n Elemente $x_1, \ldots, x_n$ einer abelschen Gruppe G und eine beliebige Permutation $\pi: \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ ist $\prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n} x_{\pi(i)}$.

Aufgabe 2: *(3 Punkte)*

Zeigen Sie, daß eine nichtleere Menge G mit einer assoziativen Verknüpfung $*: G \times G \to G$ genau dann eine Gruppe ist, wenn für je zwei Elemente $a, b \in G$ sowohl die Gleichung $a * x = b$ als auch die Gleichung $y * a = b$ in G lösbar ist! *Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß es zu einem festen* $a \in G$ *ein* $e \in G$ *gibt mit* $e * a = a$ *und folgern Sie dann, daß* $e * x = x$ *für alle* $x \in G$. *Sie können die in der Vorlesung erwähnte und im Skriptum bewiesene Tatsache benutzen, daß man in der Gruppendefinition nicht alle geforderten Gleichungen braucht.*

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

$G = \mathfrak{S}_3$ sei die Menge aller Permutationen $\pi: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$.

a) Bestimmen für die von der Transposition $\tau = (1\ 2)$ erzeugte zyklische Untergruppe die Rechts- und die Linksnebenklassen, und bestimmen Sie für jedes Element von $\mathfrak{S}_3$ sein Bild unter der Konjugation mit τ!

b) Bestimmen für die vom Dreierzyklus $\pi = (1\ 2\ 3)$ erzeugte zyklische Untergruppe die Rechts- und die Linksnebenklassen, und bestimmen Sie für jedes Element von $\mathfrak{S}_3$ sein Bild unter der Konjugation mit π!

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

Zeigen Sie:

a) Eine Teilmenge $U \subseteq G$ einer Gruppe G ist genau dann eine Untergruppe, wenn sie nicht leer ist und wenn für alle $x, y \in U$ auch xy^{-1} in U liegt.

b) Eine endliche Teilmenge $U \subseteq G$ einer Gruppe G ist genau dann eine Untergruppe, wenn sie nicht leer ist und wenn $UU \subseteq U$ gilt.

Aufgabe 5: *(4 Punkte)*

a) G sei eine Gruppe, und $\operatorname{Aut} G$ sei die Menge aller Automorphismen $\varphi: G \to G$. Zeigen Sie, daß $\operatorname{Aut} G$ bezüglich der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine Gruppe ist!

b) Zeigen Sie, daß die inneren Automorphismen eine Untergruppe von $\operatorname{Aut} G$ bilden!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 3. November 2020, um 15.20 Uhr