Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.18

14. Oktober 2020

3. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: *(3 Punkte)*
Welche Bedingungen müssen die reellen Zahlen p und q erfüllen, damit die kubische Gleichung $x^3 + px + q = 0$ keine, eine, zwei oder drei verschiedene reelle Nullstellen hat?

Lösung: Da für $f(x) = x^3 + px + q$ die Grenzwerte $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ verschiedene Vorzeichen haben, muß es nach dem Zwischenwertsatz immer mindestens eine reelle Nullstelle geben; der Fall keiner reellen Nullstelle kann also nicht auftreten.

Drei reelle Nullstellen gibt es, wie in der Vorlesung bei der Betrachtung des *casus irreducibilis* gezeigt wurde, genau dann, wenn $\Delta = 4p^3 - 27q^2$ positiv ist.

Wenn es genau zwei reelle Nullstellen gibt, muß eine davon eine doppelte Nullstelle sein, denn zwei reelle und eine nichtreelle komplexe Nullstelle ist bei reellen Koeffizienten nicht möglich, da für jede komplexe Zahl z mit $f(z)$ auch $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ verschwindet. Aus diesem Grund ist auch eine doppelte nichtreelle komplexe Nullstelle nicht möglich, denn dann wäre auch die konjugiert komplexe Zahl eine doppelte Nullstelle, was bei einer Gleichung vom Grad drei nicht möglich ist. Also gibt es genau dann zwei reelle Nullstellen, wenn es eine doppelte Nullstelle gibt.

Eine mehrfache Nullstelle gibt es genau dann, wenn $\Delta = 4p^3 - 27q^2$ verschwindet. Wenn die Nullstelle Vielfachheit drei hat, muß sie Null sein, denn nach Viète ist die Summe aller Nullstellen das Negative des Koeffizienten von x^2, und der ist hier Null. In diesem Fall ist $p = q = 0$. Die Bedingung für genau zwei reelle Nullstellen ist also $\Delta = 0$, aber p und q dürfen nicht beide verschwinden.

Der noch verbleibende Fall von genau einer reellen Nullstelle ist damit äquivalent dazu, daß $\Delta < 0$ ist oder $p = q = 0$.

Somit ist der Fall keiner reellen Nullstelle unmöglich, eine reelle Nullstelle ist äquivalent zu $p = q = 0$ oder $\Delta < 0$, zwei reelle Nullstellen sind äquivalent zu $\Delta = 0$ und drei reelle Nullstellen zu $\Delta > 0$.

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*
Schreiben Sie das Polynom $X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2$ als Polynom in den elementarsymmetrischen Funktionen in X, Y und Z !

Lösung: Der führende Term bezüglich der graduiert lexikographischen Ordnung ist X^2Y^2, d.h. das Exponententripel ist $(2, 2, 0)$. Somit ist $d_1 = 0, d_2 = 2$ und $d_3 = 0$; wir subtrahieren also

$$\sigma_2^2 = (XY + XZ + YZ)^2 = X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 + 2X^2YZ + 2XY^2Z + 2XYZ^2 ;$$

die Differenz ist

$$f_1 = -2(X^2YZ + XY^2Z + XYZ^2)$$

mit führendem Term $-2X^2YZ$, d.h. Exponenten $2, 1, 1$ und $d_1 = 1, d_2 = 0, d_3 = 1$. Wir addieren also

$$2\sigma_1\sigma_3 = 2(X + Y + Z)(XYZ) = 2(X^2YZ + XY^2Z + XYZ^2)$$

und erhalten Null. Somit ist $X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3$.

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Zeigen Sie, daß die Gleichung $x^3 - 6x + 4 = 0$ drei verschiedene reelle Lösungen hat, und bestimmen Sie diese dann *exakt* über einen trigonometrischen Ansatz!
Hinweis: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ und $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Möglicherweise kommen Sie mit der Berechnung der Kosinus- und Arkuskosinuswerte besser zurecht, wenn Sie auftretende Winkel im Gradmaß betrachten.

Lösung: Hier ist $p = -6$ und $q = 4$, also $\Delta = 4\cdot(-6)^3 - 27\cdot 4^2 = 432$. Somit ist $\Delta > 0$, und es gibt drei verschiedene reelle Lösungen.
Für den trigonometrischen Ansatz hier im *casus irreducibilis* schreiben wir $x = r\cos\varphi$, wobei
$$r = \sqrt{\frac{-4p}{3}} = \sqrt{\frac{24}{3}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
und
$$\cos 3\varphi = \frac{-4q}{r^3} = \frac{-16}{16\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
ist. Damit ist $3\varphi = \frac{3\pi}{4}$; der Winkel φ_1 ist also $\frac{\pi}{4}$ und hat den Kosinus $\sqrt{2}/2$. Die erste Lösung ist daher
$$x_1 = r\cos\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\,.$$
Die beiden anderen möglichen Winkel sind $\frac{2}{3}\pi \pm \frac{1}{4}\pi$,
$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\pi\cos\frac{\pi}{3} + \sin\pi\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\,;$$
daher ist
$$\cos\left(\frac{2}{3}\pi \pm \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} \mp \sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$
Wir erhalten also die beiden Werte
$$-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \quad\text{und}\quad \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\,.$$
Um die dazu gehörenden Lösungen der Gleichung zu erhalten, müssen wir mit $r = 2\sqrt{2}$ multiplizieren; die beiden noch fehlenden Lösungen sind also
$$x_2 = -\frac{2\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4} = -\frac{4+4\sqrt{3}}{4} = -1-\sqrt{3}$$
und
$$x_3 = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} = \frac{4\sqrt{3}-4}{4} = -1+\sqrt{3}\,.$$

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*
Zu ihrem großen Leidwesen müssen die Mitglieder des traditionsreichen Männergesangsvereins Hinterdinghartinger Frohsinn von 1867 als Konzession an das 21. Jahrhundert zu ihrem Jahresausflug auch die Familien mitnehmen. Jedes Mitglied bringt daher, falls vorhanden, seine Frau mit, und wenn das Paar Kinder hat, kommen auch die. An einem schönen Herbsttag um zehn Uhr morgens brechen achtundvierzig Personen auf; die größte Familie umfaßt sieben Personen. Um halb elf Uhr erreichen sie einen Stand, der Erfrischungen und Blumen verkauft. Jeder Mann konsumiert dort Bier im Wert von dreizehn Euro, und falls er nicht alleine unterwegs ist, schenkt er seiner Frau einen Blumenstrauß für fünf Euro. Falls er Kinder dabei hat, spendiert er jedem Limonade für zwei Euro.

Insgesamt nimmt der Stand dabei dreihundert Euro ein. Was können Sie über die Anzahl der Männer, Frauen und Kinder sagen?

Lösung: Bezeichnet x die Anzahl der Männer, y die der Frauen und z die der Kinder, so gelten die beiden Gleichungen

$$x + y + z = 48 \quad \text{und} \quad 13x + 5y + 2z = 300\,.$$

Auflösen der ersten Gleichung ergibt $z = 48 - x - y$, also ist

$$13x + 5y + 2(48 - x - y) = 11x + 3y + 96 = 300 \quad \text{oder} \quad 11x + 3y = 204\,.$$

Außerdem gelten die Ungleichungen $x \geq 1$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ und $y \leq x$.
Da drei ein Teiler von 204 ist, hat die diophantische Gleichung $11x + 3y = 204$ in $\mathbb{Z}$ die Lösung $x = 0$ und $y = 68$; da drei und elf teilerfremd sind und $11 \cdot 3 - 3 \cdot 11$ verschwindet, ist die allgemeine Lösung daher $x = 3k$ und $y = 68 - 11k$ mit einer beliebigen ganzen Zahl k. Für $k > 6$ wird y negativ, also muß $k \leq 6$ sein, und natürlich ist $k \geq 1$.
Die Anzahl $z = 48 - x - y = 48 - 3k - 68 + 11k = 8k - 20$ der Kinder kann auch nicht negativ sein, also muß $k \geq 3$ sein. Schließlich ist noch

$$y = 68 - 11k \leq x = 3k \Longrightarrow 68 \leq 14k \Longrightarrow k \geq 5\,.$$

Also kommen nur $k = 5$ und $k = 6$ in Frage. $k = 5$ führt zu der Lösung $x = 15, y = 13$ und $z = 20$, während $k = 6$ auf $x = 18, y = 2$ und $z = 28$ führt. Im letzteren Fall gäbe es nur zwei Familien mit zusammen 28 Kindern; da die größte Familie nur aus sieben Personen besteht, ist das nicht möglich. Somit waren es 15 Männern, 13 Frauen und 20 Kinder.

Aufgabe 5: *(2 Punkte)*
Zeigen Sie: Ist x eine rationale Nullstelle des Polynoms

$$a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \quad \text{mit} \quad a_i \in \mathbb{Z}\,,$$

und ist $x = p/q$ eine Darstellung von x als gekürzter Bruch, so ist p ein Teiler von a_0 und q ein Teiler von a_d.

Lösung: Durch Multiplikation mit q^d erhalten wir die Gleichung

$$a_d p^d + a_{d-1} p^{d-1} q + \cdots + a_1 p q^{d-1} + a_0 q^d = 0\,.$$

Auflösen nach $a_d p^d$ macht daraus

$$a_d p^d = -(a_{d-1} p^{d-1} q + \cdots + a_1 p q^{d-1} + a_0 q^d)\,.$$

Da die rechte Seite durch q teilbar ist, ist es auch die linke, was wegen der Teilerfremdheit von p und q nur bedeuten kann, daß q ein Teiler von a_d ist.
Analog führt Auflösen nach $a_0 q^d$ auf die Gleichung

$$a_0 q^d = -(a_d p^d + a_{d-1} p^{d-1} q + \cdots + a_1 p q^{d-1})\,,$$

deren rechte Seite durch p teilbar ist, so daß $a_0 q^d$ und damit a_0 durch p teilbar sein muß.