Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.18

7. Oktober 2020

2. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*
Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Viète die Nullstellen der folgenden Polynome:

a) $f = X^5 - 2X^4 - 11X^3 + 40X^2 - 44X + 16$

Lösung: Falls alle Nullstellen ganzzahlig sind, müssen Sie Teiler von 16 sein, denn ihr Produkt ist nach Viète gleich -16. Probieren wie die betragskleinsten Teiler:

$$f(1) = 0, \quad f(-1) = 108, \quad f(2) = 0, \quad f(-2) = 288, \quad f(4) = 288 \quad \text{und} \quad f(-4) = 0\,.$$

Damit sind drei Nullstellen gefunden; ihr Produkt ist -8. Das Produkt der beiden noch verbleibenden Nullstellen ist somit gleich zwei. Die Summe der drei bekannten Nullstellen ist -1; die Summe aller Nullstellen ist nach Vieète gleich 2. Die Summe der beiden fehlenden Nullstellen ist daher gleich -1. Wir suchen also zwei Zahlen u, v mit $uv = 2$ und $u + v = 3$. Dafür kommen nur 1 und 2 in Frage; also sind dies doppelte Nullstellen.

b) $g = X^5 + 2X^4 - 4X^3 - 8X^2 + 3X + 6$

Lösung: Falls alle Nullstellen ganzzahlig sind, müssen Sie Teiler von sechs sein.

$$g(1) = 0, \quad g(-1) = 0, \quad g(2) = 12 \quad \text{und} \quad g(-2) = 0\,.$$

Die Summe aller Nullstellen ist -2, die der drei bekannten auch; also sind die beiden fehlenden entgegengesetzt gleich. Das Produkt aller Nullstellen ist -6, das der drei bekannten ist zwei, das der noch fehlenden also -3. Da sie entgegengesetzt gleich sind, kommen nur $\pm\sqrt{3}$ in Frage; g hat also die Nullstellen $\pm 1, -2$ und $\pm\sqrt{3}$.

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*
Bestimmen Sie mit Hilfe der Cardanischen Formel die Lösungen folgender kubischer Gleichungen:

a) $x^3 + 9x^2 + 24x + 20 = 0$

Lösung: Da hier ein quadratischer Term auftritt, muß dieser zunächst durch die Substitution $x = y - 3$ eliminiert werden:

$$\begin{gathered}(y-3)^3 + 9(y-3)^2 + 24(y-3) + 20 \\ = y^3 - 9y^2 + 27y - 27 + 9(y^2 - 6y + 9) + 24y - 72 + 20 = y^3 - 3y + 2\,.\end{gathered}$$

Also ist $p = -3$ und $q = 2$. Nach der Cardanischen Formel müssen wir zunächst

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = -1 + \sqrt{1 - 1} = -1$$

berechnen. Dazu gibt es einen reellen Wert für u, nämlich $u = -1$; die beiden anderen sind

$$-\rho = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad -\bar{\rho} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Die Lösungen der kubischen Gleichung sind $y = u - p/3u$; für $u = -1$ erhalten wir $y_1 = -1 - 1 = -2$, für $u = -\rho$ ist $3/3u = -1/\rho = -\bar\rho$, also $u - p/3u = -\rho + \bar\rho = 1$. Für $u = -\bar\rho$ ist entsprechende $3/3u = -\rho$ und wieder $u - p/3u = 1$. Die Gleichung für y hat also die Eins als doppelte und -2 als einfache Nullstelle. Die Nullstellen der Ausgangsgleichung sind um drei kleiner, d.h. -2 ist doppelte Nullstelle und -5 einfache. Das Produkt $(-2)^2 \cdot (-5) = -20$ und die Summe $2 \cdot (-2) + (-5) = -9$, wie es nach dem Wurzelsatz von VIÈTE auch sein muß.

b) $y^3 + 15y + 20 = 0$

Lösung: Hier gibt es keinen quadratischen Term; wir können also direkt in die Lösungsformel einsetzen. $p = 15$ und $q = 20$, also ist $(q/2)^2 + (p/3)^3 = 10^2 + 5^3 = 225 = 15^2$. Damit ist

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = -10 + 15 = 5\,.$$

Für u selbst führt das auf die reelle Lösung $u_1 = \sqrt[3]{5}$ und die beiden konjugiert komplexen Lösungen $u_2 = u_1\rho$ und $u_3 = u_1\bar\rho$. Die Lösungen der kubischen Gleichung sind

$$\begin{aligned}
y_1 &= u_1 - 5/u_1 = \sqrt[3]{5} - \left(\sqrt[3]{5}\right)^2,\\
y_2 &= u_2 - 5/u_2 = \sqrt[3]{5}\rho - \left(\sqrt[3]{5}\right)^2\bar\rho = -\frac{\sqrt[3]{5} - \left(\sqrt[3]{5}\right)^2}{2} + i\frac{\sqrt[3]{5} - \left(\sqrt[3]{5}\right)^2}{2}\sqrt{3} \quad \text{und}\\
y_3 &= u_3 - 5/u_3 = \sqrt[3]{5}\bar\rho - \left(\sqrt[3]{5}\right)^2\rho = -\frac{\sqrt[3]{5} - \left(\sqrt[3]{5}\right)^2}{2} - i\frac{\sqrt[3]{5} - \left(\sqrt[3]{5}\right)^2}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

c) $z^3 - 9z - 12 = 0$

Lösung: Wieder gibt es keinen quadratischen Term; wir können $p = -9$ und $q = -12$ direkt einsetzen und erhalten $(q/2)^2 + (p/3)^3 = 36 - 27 = 9$. Damit ist

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = 6 + 3 = 9\,.$$

Für u selbst führt das auf die reelle Lösung $u_1 = \sqrt[3]{9} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^2$ und die beiden konjugiert komplexen Lösungen $u_2 = u_1\rho$ und $u_3 = u_1\bar\rho$. Die Lösungen der kubischen Gleichung sind

$$\begin{aligned}
y_1 &= u_1 + 3/u_1 = \left(\sqrt[3]{3}\right)^2 + \sqrt[3]{3},\\
y_2 &= u_2 + 3/u_2 = \sqrt[3]{3}\rho + \left(\sqrt[3]{5}\right)^2\bar\rho = \frac{\sqrt[3]{3} + \left(\sqrt[3]{5}\right)^2}{2} + i\frac{\sqrt[3]{3} + \left(\sqrt[3]{3}\right)^2}{2}\sqrt{3} \quad \text{und}\\
y_3 &= u_3 + 3/u_3 = \sqrt[3]{3}\bar\rho + \left(\sqrt[3]{3}\right)^2\rho = -\frac{\sqrt[3]{3} + \left(\sqrt[3]{3}\right)^2}{2} - i\frac{\sqrt[3]{3} + \left(\sqrt[3]{3}\right)^2}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Stellen Sie die Zahl $1+i$ in Polarkoordinaten dar, und geben Sie eine dritte Wurzel sowohl in Polarkoordinaten als auch in kartesischen Koordinaten an! Die kartesische Darstellung soll dabei ohne trigonometrische Funktionen auskommen. *(Hinweis: Wahrscheinlich fällt Ihnen die Lösung leichter, wenn Sie mit Winkeln im Grad- statt im Bogenmaß rechnen.)*

Lösung: $1 + i$ hat den Betrag $\sqrt{2}$ und liegt auf der ersten Winkelhalbierenden. Somit ist $1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{\pi i/4}$ und $\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{\pi i/12}$. Im Gradmaß entspricht $\pi/12$ einem Winkel von 15°. Dieser läßt sich beispielsweise als $60° - 45°$ schreiben, und am gleichseitigen sowie am gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck sieht man leicht, daß gilt

$$\cos 60° = \frac{1}{2}, \quad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad \cos 45° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} e^{\pi i/12} &= e^{\pi i/3} \cdot e^{-\pi i/4} = (\cos 60° + i \sin 60°)(\cos 45° - i \sin 45°) = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + i \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

und $\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{\pi i/12} = \dfrac{\sqrt[6]{2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{6})}{4} + i \cdot \dfrac{\sqrt[6]{2} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}$.

b) Bestimmen Sie alle Zahlen $x = a + b\sqrt{3}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, für die gilt: $x^3 = 10 - 6\sqrt{3}$

Lösung:

$$x^3 = (a + b\sqrt{3})^3 = a^3 + 3\sqrt{3}a^2b + 9ab^2 + 3\sqrt{3}b^3 = (a^3 + 9ab^2) + (3a^2b + 3b^3)\sqrt{3}\,.$$

Also muß $a^3 + 9ab^2 = 10$ sein und $3a^2b + 3b^3 = -6$, was sich auch einfacher schreiben läßt als $a(a^2 + 9b^2) = 10$ und $(a^2 + b^2)b = -2$. Für eine ganzzahlige Lösung der zweiten Gleichung können weder a noch b verschwinden, also bleiben für a nur die Möglichkeiten $a = \pm 1$ und $b = -1$. Die erste Gleichung zeigt dann, daß $a = 1$ sein muß. Somit ist $1 - \sqrt{3}$ die einzige Lösung mit ganzzahligem a und b.

c) Zeigen Sie: Für $z = n + m\sqrt{3}$ kann es höchstens dann ein $x = a + b\sqrt{3}$ mit ganzzahligem a, b und $x^3 = z$ geben, wenn m durch drei teilbar ist.

Lösung: Wie wir gerade gesehen haben, ist

$$(a + b\sqrt{3})^3 = (a^3 + 9ab^2) + (3a^2b + 3b^3)\sqrt{3}\,,$$

und hier ist der Koeffizient von $\sqrt{3}$ für ganzzahlige a, b durch drei teilbar.

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die Gleichung $x^3 + px = q$ für $p \in \mathbb{R}_{>0}$ und $q \in \mathbb{R}$ genau eine reelle Lösung hat!

Lösung: Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 + px - q$. Ihre Ableitung $f'(x) = 3x^2 + p$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv; somit ist f streng monoton wachsend. Da $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ist und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, muß es nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in \mathbb{R}$ geben mit $f(x) = 0$. Wegen der strengen Monotonie kann es nur eines geben.

b) Diese Lösung hat das gleiche Vorzeichen wie q.

Lösung: Da $p > 0$ ist, hat $x^3 + px$ das gleiche Vorzeichen wie x, und für eine Lösung ist dieser Wert gleich q.

c) Berechnen Sie nach der Formel von CARDANO die reellen Lösungen der Gleichung

$$x^3 + 24x = 56\,!$$

Lösung: Hier ist $p = 24$ und $q = -56$, also

$$(q/2)^2 + (p/3)^3 = (-28)^2 + 8^3 = 784 + 512 = 1296 = 36^2\,.$$

Somit ist $u^3 = 28 + 36 = 64 = 4^3$, und $y = u - 8/u = 4 - 2 = 2$ ist eine reelle Lösung. Nach *a)* kann es keine weitere geben.