Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.18

29. September 2020

1. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*
Bringen Sie die folgenden Gleichungen auf die jeweils anwendbare der sechs Normalformen nach al-Chwārizmī!

a) $x^2 - 3x + 5 = 2x + 7$

Lösung: Durch al-dschabr werden die $3x$ auf die rechte Seite gebracht; sodann wird durch al-muqābala auf beiden Seiten fünf subtrahiert; übrig bleibt $x^2 = 5x + 2$.

b) $x^2 - 4x - 8 = 12 - 5x$

Lösung: Durch al-muqābala werden auf beiden Seiten sowohl $5x$ als auch acht addiert mit Ergebnis $x^2 + x = 20$.

c) $x^2 + 5x + 3 = x^2 + 3x + 7$

Lösung: Hier kommt al-muqābala gleich dreimal zum Einsatz: Auf beiden Seiten werden x^2, $3x$ und drei subtrahiert mit Ergebnis $2x = 4$.

d) $x^2 + x + 1 = 3x - 3$

Lösung: Auf beiden Seiten wird x subtrahiert und drei addiert; das führt zu $x^2 + 4 = 4x$.

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*
Zeigen Sie:

a) Eine quadratische Gleichung mit zwei positiven Lösungen läßt sich stets auf die Form $x^2 + q = px$ mit $p > 0$ und $q > 0$ bringen.

Lösung: Sind x_1 und x_2 die beiden Lösungen, so läßt sich die Gleichung auch schreiben als

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 + x_1x_2 = (x_1 + x_2)x\,.$$

Da x_1 und x_2 positiv sind, hat die rechte Gleichung die gewünschte Form.

b) Falls die Gleichung $x^2 + q = px$ mit $p > 0$ und $q > 0$ keine zwei positiven Lösungen hat, hat sie entweder eine doppelte Nullstelle oder keine reelle Lösung.

Lösung: $x_{1,2} = \frac{1}{2}\big(p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\big)$ führt im Falle $p^2 > 4q$ zu zwei positiven Lösungen, da $p > 0$ und $p^2 - 4q$ wegen der Positivität von q kleiner als p^2 ist, so daß auch p minus Wurzel positiv bleibt. Für $p^2 = 4q$ gibt es die doppelte Nullstelle $p/2$, und für $p^2 < 4q$ ist die Wurzel rein imaginär, so daß es keine reellen Lösungen gibt.

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*
Finden Sie die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen, und geben Sie diese in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an:

a) $z^2 - 2i = 0$

Lösung: Die Gleichung ist äquivalent zu $z^2 = 2i$. Bekanntlich ist $(1+i)^2 = 1^2+2i+i^2 = 2i$, so daß $z_1 = 1 + i$ eine Lösung ist. Die zweite ist natürlich $z_2 = -z_1 = -1 - i$.

b) $z^2 + 4iz + 5 = 0$

Lösung: Dies läßt sich umschreiben als $(z + 2i)^2 = -9$, also ist $z + 2i = \pm 3i$, was auf die beiden Lösungen $z_1 = i$ und $z_2 = -5i$ führt.

c) $z^2 - 3z + 4 + (3 - z)i = 0$

Lösung: Nach z-Potenzen sortiert wird die Gleichung zu $z^2 - (3 + i)z + 4 + 3i = 0$. Quadratische Ergänzung macht daraus

$$\left(z - \frac{3+i}{2}\right)^2 - \frac{(3+i)^2}{4} + 4 + 3i = \left(z - \frac{3+i}{2}\right)^2 - \frac{8-6i}{4} + 4 + 3i = \left(z - \frac{3+i}{2}\right)^2 + 2 + \frac{3i}{2} = 0\,.$$

Wir suchen also die Quadratwurzeln $a + ib$ von $-2 - \frac{3}{2}i$. $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$, d.h. $a^2 - b^2 = -2$ und $2ab = -\frac{3}{2}$. Somit ist $b = -\frac{3}{4a}$ und $a^2 - b^2 = a^2 - \frac{9}{16a^2} = -2$. Multiplikation mit a^2 macht daraus die quadratische Gleichung

$$a^4 + 2a^2 - \frac{9}{16} = (a^2 + 1)^2 - 1 - \frac{9}{16} = (a^2 + 1)^2 - \frac{25}{16} = 0\,.$$

Somit ist $a^2 + 1 = \frac{5}{4}$, denn a ist real, so daß nur die positive Wurzel in Frage kommt. und $a^2 = \frac{1}{4}$. Also ist $a = \pm\frac{1}{2}$ und $b = -\frac{3}{4a} = \mp\frac{3}{2}$. Die beiden Quadratwurzeln aus $-2 - \frac{3}{2}i$ sind also $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ und $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. Die Gleichung

$$\left(z - \frac{3+i}{2}\right)^2 + 2 + \frac{3i}{2} = 0$$

wird damit zu

$$z - \frac{3+i}{2} = \pm\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right),$$

die Lösungen sind also

$$z_1 = \frac{3+i}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i = 2 - i \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{3+i}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i = 1 + 2i\,.$$

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*
Finden Sie die ganzzahligen Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $2x^3 + x^2 - 7x = 6$

Lösung: Nach einem Lemma aus der Vorlesung ist jede ganzzahlige Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten Teiler des konstanten Glieds. Dieses ist hier -6; wenn es ganzzahlige Nullstellen gibt, kommen also nur ± 1, ± 2, ± 3 und ± 6 in Frage, Für $x = 1$ erhalten wir die falsche Gleichung $2 + 1 - 7 = 6$, für $x = -1$ ist $-2 + 1 + 7 = 6$ und für $x = 2$ ist $16 + 4 - 14 = 6$. Also sind -1 und 2 Lösungen. Um auch noch die dritte zu finden, können wir den Wurzelsatz von VIÈTE anwenden, müssen dazu aber die Gleichung durch zwei dividieren um führenden Koeffizienten eins zu erhalten. Der Koeffizient von x^2 ist dann $\frac{1}{2}$, und das ist die negative Summe aller Nullstellen. Die noch fehlende dritte Nullstelle ist somit $-\frac{3}{2}$ und damit nicht ganzzahlig.

b) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

Lösung: Auch hier kommen nur $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ und ± 6 in Frage. $1^3 - 4 \cdot 1^2 + 1 + 6 = 4$, $(-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + 1 + 6 = 0$ und $2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 6 = 0$. Da das Produkt aller Nullstellen gleich -6 sein muß (oder da die Summe vier ist), kommt für die dritte Nullstelle nur die Drei in Frage.

c) $3x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = 0$

Lösung: Nach dem Lemma aus der Vorlesung müssen alle ganzzahligen Nullstellen Teiler von zwei sein, d.h. nur ± 1 und ± 2 kommen in Frage. ± 1 sind beide Nullstellen; da die Summe aller drei Nullstellen nach VIÈTE gleich $\frac{2}{3}$ sein muß, ist das die dritte Nullstelle.