

15. November 2019

10. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: (12 Punkte)

K sei der kleinste Teilkörper von \mathbb{R} , der die Zahlen $\sqrt{3}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{60}$ und $\sqrt{7}$ enthält.

- Wie viele Monomorphismen $K \rightarrow \mathbb{R}$ gibt es?
- Bestimmen Sie die Gruppe aller Automorphismen $K \rightarrow K$!
- Zeigen Sie, daß die Körpererweiterung K/\mathbb{Q} GALOISSCH ist und daß auch für jeden Zwischenkörper $\mathbb{Q} \leq L \leq K$ sowohl die Erweiterung L/\mathbb{Q} als auch die Erweiterung K/L GALOISSCH ist!
- Finden Sie eine Basis von K als \mathbb{Q} -Vektorraum.
- Finden Sie ein möglichst einfaches Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ derart, daß K ein Zerfällungskörper von f ist!
- Zeigen Sie, daß die GALOIS-Gruppe dieses Körpers auflösbar ist!

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Sie starten mit den Punkten $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$ der EUKLIDISCHEN Ebene.

- Geben Sie eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal an für den Punkt $Q_1 = (1, 1)$!
- Q_2 sei der Schnittpunkt des Kreises um P_1 durch Q_1 mit der Geraden P_1P_2 rechts von P_2 , und Q_3, Q_4 seien die beiden Schnittpunkte des Kreises um Q_2 durch Q_1 mit der Geraden P_1P_2 . Bestimmen Sie die Koordinaten von Q_3, Q_4 und den Grad des kleinsten Teilkörpers von \mathbb{R} , der diese Koordinaten enthält, über \mathbb{Q} !
- Nun sei für ein $a > 0$ der Punkt $R = (1, a)$ gegeben, und $S = (1, x)$ sei so gewählt, daß der Winkel zwischen den Geraden P_1P_2 und P_1S ein Drittel des Winkels zwischen P_1P_2 und P_1R ist. Stellen Sie eine Gleichung für x in Abhängigkeit von a auf!