

17. November 2015

10. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: (5 Punkte)

- Zeigen Sie: Ist $z \in \mathbb{C}$ eine r -fache Nullstelle eines Polynoms $f \in \mathbb{R}[X]$, so ist auch \bar{z} eine r -fache Nullstelle von f .
- Folgern Sie, daß alle irreduziblen Polynome aus $\mathbb{R}[X]$ linear oder quadratisch sind!
- Welche Bedingung müssen p und q erfüllen, damit das Polynom $X^2 + pX + q \in \mathbb{R}[X]$ irreduzibel ist?

Aufgabe 2: (5 Punkte)

G sei eine Gruppe, und χ_1, \dots, χ_r seien paarweise verschiedene Gruppenhomomorphismen von G in die multiplikative Gruppe k^\times eines Körpers. Zeigen Sie, daß die χ_i linear unabhängig sind, d.h. falls $a_1\chi_1(g) + \dots + a_r\chi_r(g) = 0$ für alle $g \in G$ und irgendwelche $a_i \in k$, müssen alle a_i verschwinden. (*Hinweis: Benutzen Sie die Methode mit der in der Vorlesung ein ähnliches Resultat für Monomorphismen von Körpern bewiesen wurde!*)

Aufgabe 3: (4 Punkte)

- $\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ sei ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, daß $\varphi(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$!
- Finden Sie einen Automorphismus von additiven Gruppen $\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, der nicht gleich der Identität ist!
- Gibt es auch einen nichttrivialen Automorphismus $\varphi: \mathbb{Q}^\times \rightarrow \mathbb{Q}^\times$ der multiplikativen Gruppe von \mathbb{Q} ?

Aufgabe 4: (6 Punkte)

- Zeigen Sie, daß $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ ein Zerfällungskörper des Polynoms $X^4 - 2$ ist!
- Finden Sie eine Basis von K als \mathbb{Q} -Vektorraum. (*Hinweis: Es dürfte am einfachsten sein, wenn Sie K über die Folge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \subset K$ schrittweise aufbauen.*)
- $\varphi: K \rightarrow K$ sei der Automorphismus, der i festläßt und $\sqrt[4]{2}$ auf $i\sqrt[4]{2}$ abbildet, und τ sei die komplexe Konjugation. Bestimmen Sie die Fixkörper

$$\{x \in K \mid \sigma(x) = x\}, \quad \{x \in K \mid \tau(x) = x\} \quad \text{und} \quad \{x \in K \mid \sigma(x) = x \text{ und } \tau(x) = x\}!$$

- Welche Ordnungen haben σ, τ und die von σ, τ erzeugte Automorphismengruppe?