

24. Oktober 2018

7. Übungsblatt Algebraische Statistik

Aufgabe 1: (4 Punkte)

- Zeigen Sie: \tilde{f} und \tilde{g} seien die normierten Polynome zu $f, g \in k[X_1, \dots, X_n]$, d.h. die Polynome werden durch ihren führenden Koeffizienten dividiert. Zeigen Sie: $S(\tilde{f}, \tilde{g}) = S(f, g)$!
- $f \in k[X]$ und $g \in k[Y]$ werden beide als Polynome aus $k[X, Y]$ betrachtet. Zeigen Sie, daß das S-Polynom $S(f, g)$ bei der Division durch f, g Rest Null hat!
- $f_1, \dots, f_m \in k[X_1, \dots, X_n]$ seien Polynome in jeweils nur einer der Variablen. Unter welchen Bedingungen bilden sie eine GRÖBNER-Basis des von ihnen erzeugten Ideals?
- Unter welchen Bedingungen bilden sie eine minimale bzw. reduzierte GRÖBNER-Basis?

Aufgabe 2: (2 Punkte)

- Zeigen Sie: Ist $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Hauptideal, so ist auch $\text{FM}(I)$ ein Hauptideal!
- Konkret sei $I = (X^3 + X^2Y^2 + Y^3)$. Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für das Ideal $\text{FM}(I)$, und geben Sie jeweils eine Monomordnung an, die zu dieser Möglichkeit führt!

Aufgabe 3: (5 Punkte)

- Finden Sie für $D = \{(3, 7), (2, 5), (4, 6)\}$ ein Erzeugendensystem des Ideal $I(D)$!
- Bestimmen Sie die Mengen $\text{Est}_\tau(D)$ für die vier in maxima implementierten Monomordnungen jeweils für die Fälle $X > Y$ und $Y > X$!
- Gibt es außer den gefundenen Est-Mengen noch weitere Ordnungsideale, die aus drei Monomen bestehen?

Aufgabe 4: (9 Punkte)

Das Design D bestehe aus den Punkten $(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (1, -1)$ und $(1, 1)$.

- Bestimmen Sie alle Ordnungsideale, die zu einem auf Grund von D schätzbaren Modell führen!
- Ist das Modell $\theta_1 X + \theta_2 Y + \theta_3 X^2 + \theta_4 XY + \theta_5 Y^2$ auf Grund von D schätzbar?
- Zeigen Sie, daß D die Nullstellenmenge des von den Polynomen $f_1 = X^2 - 1$, $f_2 = Y^3 - Y$ und $f_3 = (X + 1)(Y^2 - 1)$ erzeugten Ideals I ist!
- Zeigen Sie, daß f_1, f_2, f_3 bezüglich jeder Monomordnung eine GRÖBNER-Basis von I bilden!
- Folgern Sie, daß $I = \sqrt{I}$ und somit I das Designideal von D ist!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 31. Oktober 2018, um 11.55 Uhr