Klausur Lineare Algebra I am 03.02.10

Es sind insgesamt 60 Punkte bei der Klausur zu erreichen.

Aufgabe 1. *(6 Punkte insgesamt)*

a.) (3P) Definieren Sie, was eine abelsche Gruppe ist.

b.) (3P) Definieren Sie, was ein Vektorraum V über einem Körper K ist (der Begriff Körper braucht nicht definiert zu werden).

Aufgabe 2. *(8 Punkte insgesamt)*

Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\phi\colon V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung.

a.) (3P) Definieren Sie, was es heißt, daß ϕ diagonalisierbar ist und geben Sie ein zur Definition äquivalentes Kriterium dafür an, daß ϕ diagonalisierbar ist.

b.) (3P) Definieren Sie, was ein Eigenwert von ϕ ist, ein Eigenvektor von ϕ und die charakteristische Abbildung von ϕ.

c.) (2P) Geben Sie für $\lambda \in K$ ein zur Definition äquivalentes Kriterium dafür an, daß λ ein Eigenwert von ϕ ist.

Aufgabe 3. *(6 Punkte insgesamt)*

a.) (4P) Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Definieren Sie, wann folgende Abbildung Ψ eine Determinante genannt wird:

$$\Psi\colon M(n, n, K) \longrightarrow K.$$

b.) (2P) Formulieren Sie den Determinantenproduktsatz.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

Zeigen Sie, daß folgende Teilmenge V der Symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_4$ eine abelsche Untergruppe von $\mathcal{S}_4$ ist:

$$V := \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subseteq \mathcal{S}_4.$$

Lösung zu Aufgabe 4

Es sind folgende Aussagen zu verifizierten:

(i) $\quad x, y \in V \implies x \circ y \in V.$

(ii) $\quad id \in V.$

(iii) $\quad x \in V \implies x^{-1} \in V.$

(iv) $\quad x, y \in V \implies x \circ y = y \circ x.$

Dazu wird zuerst eine Multiplikationstafel für die Elemente aus V aufgestellt (dies ist „noch“ keine Gruppentafel, da bisher nicht gezeigt ist, daß V eine Gruppe ist):

$\circ$	id	$(12)(34)$	$(13)(24)$	$(14)(23)$
id	id	$(12)(34)$	$(13)(24)$	$(14)(23)$
$(12)(34)$	$(12)(34)$	id	$(14)(23)$	$(13)(24)$
$(13)(24)$	$(13)(24)$	$(14)(23)$	id	$(12)(34)$
$(14)(23)$	$(14)(23)$	$(13)(24)$	$(12)(34)$	id

Nun können die Punkte (i) bis (iv) an Hand der Tafel verifiziert werden:

(i) Da alle Produkte von Elementen aus V wieder in V liegen, d.h. alle Multiplikationstafeleinträge, ist dieser Punkt erfüllt.
(ii) Dies ist schon nach der Definition von V erfüllt.
(iii) In jeder Zeile der Multiplikationstafel tritt das neutrale Element id auf, so daß zu jedem Element $x \in V$ auch das Inverse in V enthalten sein muß.
(iv) Die aufgestellte Multiplikationstafel ist symmetrisch und somit die Verknüpfung eingeschränkt auf V kommutativ.

Aufgabe 5. *(8 Punkte insgesamt)*

a.) *(4P) Es sei ein reelles lineares Gleichungssystem $Ax = b$ für $x \in \mathbb{R}^4$ gegeben durch:*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie seine Lösungsmenge an.

b.) *(4P) Geben Sie für die durch A definierte lineare Abbildung*

$$\phi_A \colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine Basis ihres Kerns und Bildes an.

Lösung zu Aufgabe 5

a.) Der Gaußalgorithmus liefert folgende Umformungen des zu lösenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & v & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & -4 \end{array} \xrightarrow[\sigma_{3,1,-6}]{\sigma_{2,1,-5}} \begin{array}{cccc|c} x & y & z & v & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & -8 \\ 0 & -8 & -16 & -24 & -16 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\sigma_{3,2,-2}} \begin{array}{cccc|c} x & y & z & v & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc|c} x & y & z & v & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Dies führt dann zu folgenden Lösungen:

$$\begin{aligned} y + 2z + 3v = 2 \quad &\Longrightarrow \quad y = 2 - 2z - 3v \\ x + 2y + 3z + 4v = 2 \quad &\Longrightarrow \quad x = -2 + z + 2v \end{aligned}$$

Der Lösungsraum $L(A, b)$ hat somit die Form:

$$\begin{aligned} L(A,b) &= \left\{ \begin{pmatrix} -2+z+2v \\ 2-2z-3v \\ z \\ v \end{pmatrix} \mid z, v \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} z+2v \\ -2z-3v \\ z \\ v \end{pmatrix} \mid z, v \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + L(A, 0). \end{aligned}$$

b.) Der Lösungsraum $L(A, b)$ aus dem vorherigen Teil ist schon mit Hilfe des Lösungsraumes $L(A, 0)$ beschrieben worden, der nichts anders ist als der Kern von ϕ_A; es gilt somit:

$$\ker \phi_A = \left\{ \begin{pmatrix} z+2v \\ -2z-3v \\ z \\ v \end{pmatrix} \mid z, v \in \mathbb{R} \right\}.$$

Eine Basis dieses Raumes ergibt sich sofort, wenn das Tupel der freien Variablen (z, v) einmal mit $(1, 0)$ und einmal mit $(0, 1)$ besetzt wird:

$$B_{\ker \phi_A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Um eine Basis des Bildes von ϕ_A zu bestimmen, muß zuersteinmal seine Dimsion bestimmt werden: diese entspricht dem Rang der Matrix A, der nach den Gaußumformungen des vorherigen Teiles aus der entstandenen Gaußnormalform abgelesen werden kann und den Wert 2 hat.
Die Spalten der Matrix A sind als Bilder der Standardbasisvektoren ein Erzeugendensystem des Bildes, und wegen vorheriger Dimensionsaussage ($\operatorname{rg} A = 2$) müssen aus den Spalten der Ursprungsmatrix

A zwei linear unabhängige Vektoren ausgewählt werden. Offensichtlich erfüllen die ersten beiden Spalten diese Bedingung:

$$B_{\operatorname{im}\phi_A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 6. *(8 Punkte insgesamt)*

a.) (2P) Die lineare Abbildung $\phi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch:

$$\phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x - y + z \\ x + y - z \\ x + z - 2y \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Matrizendarstellung von ϕ an, wobei Sie in beiden Räumen die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ wählen sollen.

b.) (4P) Sei $A, B \in M(2, 2, \mathbb{F}_5)$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie, ob die Matrizen invertierbar sind und geben Sie gegebenfalls die Inverse an.

c.) (2P) Berechnen Sie die Determinante folgender reeller Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 6

a.) Um die Matrizendarstellung $[\phi]$ von ϕ bzgl. der Standardbasisvektoren zu bekommen, müssen die Standardbasisvektoren e_1 bis e_3 in ϕ eingesetzt werden und die jeweiligen Bildvektoren als Spalten in $[\phi]$ eingesetzt werden:

$$\phi(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \phi(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \phi(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad [\phi] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b.) Die additiven und multiplikativen Inversen in $\mathbb{F}_5$ haben folgende Form:

a	0	1	2	3	4
$-a$	0	4	3	2	1

und

a	1	2	3	4
$\frac{1}{a}$	1	3	2	4

Damit errechnen sich die Determinanten der Matrizen A und B über $\mathbb{F}_5$ zu

$$\begin{aligned}\det A &= 2\cdot 3 - 2\cdot 1 = 1 - 2 = 1 + 3 = 4,\\ \det B &= 2\cdot 3 - 1\cdot 1 = 1 - 1 = 1 + 4 = 0.\end{aligned}$$

Also ist die Matrix A invertierbar, und die Matrix B nicht.
Die Inverse einer invertierbaren (2×2)-Matrix läßt sich über folgende Formel bestimmen:

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \det A \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

woraus sich für die Matrix der Aufgabe ergibt:

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

(Alle Rechnungen in Teil b.) sind in $\mathbb{F}_5$ ausgeführt!)

c.) Mit Hilfe des Laplacschen Entwicklungssatzes ergibt sind:

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \end{pmatrix} &= 1\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 2 \end{pmatrix}\\ &= (-1)\cdot 5\cdot\det\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -5\cdot(6\cdot 2 - 0) = -60.\end{aligned}$$

Dabei wurde zuerst nach der ersten Spalte entwickelt (Vorzeichen positiv und Faktor 1), dann nach der zweiten Spalte (Vorzeichen negativ, Faktor 5), und die Determinante der (2×2)-Matrix direkt ausgerechnet.

Aufgabe 7. *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie für die folgenden beiden reellen Matrizen die charakteristische Abbildung, deren Eigenwerte, und ob sie diagonalisierbar sind:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung für Aufgabe 7

Die Charakteristischen Abbildungen und Eigenwerte von A und B errechnen sich folgendermaßen:

$$(A) \quad P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda) + 1$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$
$$\Longrightarrow \quad \text{Eigenwerte von } A\text{: } \lambda = 1.$$

$$(B) \quad P_B(\lambda) = \det(B - \lambda E_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$
$$\overset{\text{Diagonalmatrix}}{=} (1-\lambda)(2-\lambda)^2.$$
$$\Longrightarrow \quad \text{Eigenwerte von } B\text{: } \lambda_1 = 1 \text{ und } \lambda_2 = 2.$$

Ein Diagonlisierbarkeitstest für eine Matrix $C \in M(n, n, K)$ kann folgendermaßen geführt werden:

$$C \text{ diagonalisierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} \dim E_{C,\lambda_i} = n.$$

Dabei seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von C und E_{C,λ_i} die zugehörigen Eigenräume.
Für die Dimension der Eigenräume gilt mit Hilfe des Rangsatzes für lineare Abbildungen:

$$\dim E_{C,\lambda_i} = \dim \ker(C - \lambda_i E_n) = n - \operatorname{rg}(C - \lambda_i E_n),$$

so daß sich obiges Kriterium umformulieren läßt zu:

$$C \text{ diagonalisierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} \Big(n - \operatorname{rg}(C - \lambda_i E_n) \Big) = n.$$

(Somit muß der Eigenraum zu einem λ_i nicht explizit bestimmt werden, sondern nur der Rang, d.h. die Gaußnormalform, einer Matrix!).

Für die Matrizen der Aufgabe liefert dies folgende Diagonalisierbarkeitstests:
Für $A \in M(2, 2, \mathbb{R})$ gibt es nur einen Eigenwert $\lambda = 1$, so daß der Diagonalisierbarkeitstest die Form

$$\begin{aligned} A \text{ diagonalisierbar} \quad &\Longleftrightarrow \quad 2 - \operatorname{rg}(A - E_2) = 2 \\ &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{rg}(A - E_2) = 0 \end{aligned}$$

hat. Der Rang von $A - E_2$ läßt sich sofort mit dem Gaußalgorithmus bestimmen und liefert dann die Aussage über die Diagonalisierbarkeit von A:

$$A - E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma_{2,1,1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{rg}(A - E_2) = 1$$
$$\Longrightarrow \quad A \text{ ist nicht diagonalisierbar.}$$

Die Matrix $B \in M(3,3,\mathbb{R})$ hat die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$, so daß die Diagonalisierbarkeitsbedingung folgende Gestalt hat:

$$\begin{aligned} B \text{ diagonalisierbar} \quad &\Longleftrightarrow \quad 3 - \operatorname{rg}(B - E_3) + 3 - \operatorname{rg}(B - 2E_3) = 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad 3 = \operatorname{rg}(B - E_3) + \operatorname{rg}(B - 2E_3). \end{aligned}$$

Die Ränge von $B - E_3$ und $B - 2E_3$ lassen sich sofort aus den jeweiligen Matrizen ablesen, da sie fast oder schon in Gaußnormalform sind, und liefern dann die Diagonalisierbarkeitsaussage:

$$(B - E_3) \qquad \operatorname{rg}(B - E_3) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$
$$(B - 2E_3) \qquad \operatorname{rg}(B - 2E_3) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$
$$\Longrightarrow \quad B \text{ ist nicht diagonalisierbar.}$$

Aufgabe 8. *(4 Punkte)*
Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und seien $A, D \in M(n,n,K)$. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

$$A \text{ ist ähnlich zu } D \quad \Longrightarrow \quad A^k \text{ ist ähnlich zu } D^k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Lösung zu Aufgabe 8
Ist A ähnlich zu D, so gibt es eine reguläre (invertierbare) Matrix T mit $T^{-1}AT = D$. Eine kurze Rechnung zeigt dann, daß dann auch $T^{-1}A^2T = D^2$ gilt:

$$D^2 = DD = (T^{-1}AT)(T^{-1}AT) = T^{-1}ATT^{-1}AT = T^{-1}A^2T.$$

Dies gibt Anlaß zu folgender Aussage, die sich dann leicht mit einer vollständigen Induktion beweisen läßt:

$$T^{-1}AT = D \quad \Longrightarrow \quad T^{-1}A^kT = D^k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Der Induktionsanfang $k = 1$ für diese Aussage ist trivial, und so kann als Induktionsannahme angenommen werden, daß die Aussage für ein

$n \in \mathbb{N}$ gilt. Nun ist als Induktionsschritt zu zeigen, daß daraus die Aussage für $n+1$ folgt:

$$\begin{aligned} T^{-1}A^{n+1}T = T^{-1}A^nAT &= \underbrace{T^{-1}A^nT}_{= D^n \text{ nach Ind.}} T^{-1}AT \\ &= D^nT^{-1}AT = D^nD = D^{n+1}. \end{aligned}$$

Diese „schärfe“ Aussage liefert nun die zu zeigende Aufgabe:

$$\begin{aligned} A \text{ ist ähnlich zu } B &\implies \exists T \text{ regulär} : T^{-1}A^kT = D \\ &\implies \exists T \text{ regulär} : T^{-1}A^kT = D^k \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \\ &\implies A^k \text{ ist ähnlich zu } D^k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Aufgabe 9. *(8 Punkte insgesamt)*
Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\phi\colon V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung.

a.) (4P) Sei ϕ invertierbar und λ ein Eigenwert zu ϕ. Beweisen Sie, daß dann $\lambda \neq 0$ gilt und λ^{-1} ein Eigenwert zu ϕ^{-1} ist.
b.) (4P) Es gelte $\phi \circ \phi = \phi$, und es sei λ ein Eigenwert von ϕ. Beweisen Sie, daß dann $\lambda \in \{0, 1\}$ gilt.

Lösung zu Aufgabe 9

a.) Wäre $\lambda = 0$ ein Eigenwert zu ϕ, so gäbe es ein $v \neq 0$ mit

$$\phi(v) = \lambda v = 0v = 0,$$

und somit wäre $v \neq 0 \in \ker \phi$. Dies zeigt:

$$\begin{aligned} \phi \text{ hat den Eigenwert } 0 &\implies \ker \phi \neq \{0\} \\ &\implies \phi \text{ nicht invertierbar.} \end{aligned}$$

(Es gilt bei allen Implikationen sogar Äquivalenz.)
Damit muß $\lambda \neq 0$ gelten.
Ist nun $v \neq 0$ ein Eigenvektor von ϕ zum Eigenwert $\lambda \neq 0$, so gilt:

$$v = \phi^{-1}(\phi(v)) = \phi^{-1}(\lambda v) = \lambda\phi^{-1}(v),$$

und da $\lambda \neq 0$ gilt, darf diese Gleichung durch λ geteilt werden:

$$v = \lambda\phi^{-1}(v) \quad \implies \quad \lambda^{-1}v = \phi^{-1}(v).$$

Somit ist λ^{-1} ein Eigenwert von ϕ^{-1} (und alle Eigenvektoren von ϕ zum Eigenwert λ sind Eigenvektoren von ϕ^{-1} zum Eigenwert λ^{-1}!).

b.) Sei $v \neq 0$ ein Eigenvektor von ϕ zum Eigenwert λ; dann gilt:

$$\lambda v = \phi(v) = \phi(\phi(v)) = \phi(\lambda v) = \lambda\phi(v) = \lambda^2 v.$$

Daraus läßt sich unmittelbar folgern:

$$\lambda^2 v = \lambda v \quad \Longrightarrow \quad (\lambda^2 - \lambda)\underbrace{v}_{\neq 0} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^2 - \lambda = 0$$
$$\Longrightarrow \quad (\lambda - 1)\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda \in \{0, 1\}.$$

Viel Erfolg!!!