wir haben also die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)g(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{g}(t)\,dt\,. \qquad (*)$$

Um daraus Aussagen über das HERMITEsche Skalarprodukt herzuleiten, benutzen wir die Beziehungen

$$\widehat{\widehat{f}}(t) = 2\pi\check{\widehat{f}}(-t) = 2\pi f(-t) \quad \text{oder} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\widehat{\widehat{f}}(-t) \qquad (**)$$

und

$$\begin{aligned} \overline{\widehat{g}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g}(t)\,\overline{e^{-i\omega t}}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g}(t)\,e^{i\omega t}\,dt \\ &= -\int_{\infty}^{-\infty} \overline{g}(-t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g}(-t)e^{-i\omega t}\,dt \qquad (***) \\ &= \widehat{\overline{g}}(-\omega)\,, \end{aligned}$$

wobei der Übersichtlichkeit halber $\overline{g}$ für diejenige Funktion steht, die jedem Wert t den Funktionswert $\overline{g}(t) = \overline{g(t)}$ zuordnet; entsprechend ist $\overline{\widehat{g}}(t) = \overline{\widehat{g}(t)}$.

Damit läßt sich das HERMITEsche Skalarprodukt folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} (f,g) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt \underset{(**)}{=} \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{f}}(-t)\widehat{\widehat{\overline{g}}}(-t)\,dt \\ &\underset{(*)}{=} \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{\widehat{f}}}(-t)\widehat{\overline{g}}(-t)\,dt \underset{(**)}{=} \frac{1}{4\pi^2}\cdot 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\widehat{\overline{g}}(-t)\,dt \\ &\underset{(***)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\overline{\widehat{g}}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f},\widehat{g})\,. \end{aligned}$$

Die Aussage über das Produkt der inversen FOURIER-Transformierten folgt nun einfach daraus, daß die beiden Transformationen zueinander invers sind:

$$(\check{f},\check{g}) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{\check{f}},\widehat{\check{g}}) = \frac{1}{2\pi}(f,g)\,.$$

■

Bemerkung: Falls wir für beide Transformationen den Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}$ gewählt hätten, würden beide das HERMITEsche Skalarprodukt respektieren, allerdings müßten wir uns dann ständig mit dieser Wurzel vor den Integralen herumschlagen. So hat jede Normierung ihre Vor- und Nachteile.

§8: Die Fourier-Transformation auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, verhält sich die FOURIER-Transformation auf dem SCHWARTZ-Raum genau so, wie wir es erwarten. Leider sind aber die Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum für die meisten Anwendungen zu schön, um nützlich zu sein. Wir brauchen daher einen größeren Funktionenraum, auf dem wir die FOURIER-Transformation immer noch gut verstehen können. Darum geht es in diesem Paragraphen.

a) Quadratintegrierbare Funktionen

Definition: Eine integrierbare Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ heißt *quadratintegrierbar,* wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt$$

existiert und konvergiert. Der Vektorraum aller quadratintegrierbarer Funktionen wird mit $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ bezeichnet.

Nach Aussage *c)* des ersten Lemmas aus §7*a)* ist jede stark abfallende Funktion quadratintegrierbar, d.h. der SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist ein Untervektorraum von $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Er ist allerdings deutlich kleiner als

$L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, denn beispielsweise ist auch jeder Rechteckimpuls quadratintegrierbar und allgemeiner jede stückweise stetige Funktion, die außerhalb eines endlichen Intervalls $[a, b]$ identisch verschwindet. Auch Funktionen wie $e^{-|t|}$ liegen in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, denn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-|t|}\right|^2 dt = 2\int_0^{\infty} e^{-2t}\, dt = 1\,.$$

Funktionen wie $\sin \omega t$ sind natürlich nicht quadratintegrierbar; aber bei periodischen Funktionen betrachtet man ohnehin sinnvollerweise nur Integrale über eine Periode, nicht solche über die gesamte reelle Achse. (Das ist der aus der Elektrotechnik bekannte Unterschied zwischen Energie- und Leistungssignalen; die Energiesignale sind genau die quadratintegrierbaren.)

Auf dem SCHWARTZ-Raum haben wir ein HERMITEsches Produkt, bezüglich dessen wir das Integral über $|f|^2$ kurz als $\sqrt{(f, f)}$ schreiben können; wir wollen uns als nächstes überlegen, daß zumindest die Definition

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

auch für $f, g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sinnvoll ist:

Da $\big(|f(t)| - |g(t)|\big)^2 \ge 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, ist nach der binomischen Formel auch

$$|f(t)| \cdot |g(t)| \le \frac{1}{2}\Big(|f(t)|^2 + |g(t)|^2\Big)\,,$$

also

$$\int_N^M |f(t)g(t)|\; dt \le \frac{1}{2}\int_N^M f(t)\overline{g(t)}\, dt + \frac{1}{2}\int_N^M g(t)\overline{g(t)}\, dt$$

für alle $N \le M \in \mathbb{R}$. Rechts konvergieren beide Integrale für $N \to -\infty$ und $M \to \infty$, also auch links, und damit konvergiert das Integral zu (f, g) sogar absolut.

Es hat alle Eigenschaften eines HERMITEschen Produkts mit Ausnahme der positiven Definitheit – genau wie wir es vom periodischen Fall her gewohnt sind. Wie dort bezeichnen wir

$$\|f\|_2 \underset{\text{def}}{=} \sqrt{(f, f)}$$

kurz, wenn auch schlampig als L^2-Norm von f, denn – wie schon bei den periodischen Funktionen – können die Funktionen $f \not\equiv 0$ mit $\|f\|_2 = 0$ für die meisten Anwendungen *praktisch* vernachlässigt werden.

Definition: $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ heißt *Nullfunktion*, wenn $\|f\|_2 = 0$ ist.

Nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung, die wir in **[HM1]**, *Kap. 1*, §6*c)* aus gutem Grund auch für Produkte bewiesen haben, die nur bis auf die positive Definitheit HERMITEsch sind, ist dann für eine beliebige Funktion $g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$|(f, g)| \le \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 = 0\,,$$

für eine Nullfunktion f verschwindet also jedes Produkt (f, g), und umgekehrt ist auch jede Funktion mit dieser Eigenschaft eine Nullfunktion, denn $\|f\|_2$ ist ja die Wurzel aus (f, f).

b) Distributionen auf dem Schwartz-Raum

Jede quadratintegrierbare Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ definiert eine lineare Abbildung

$$\widetilde{T}_f\colon \begin{cases} L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ \displaystyle g \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\, dt \end{cases}$$

Man beachte daß hier, trotz der komplexwertigen Funktionen, keine komplexe Konjugation steht! Vergleich mit dem Produkt

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{g(t)}\, dt$$

zeigt, daß
$$\widetilde{T}_f(g) = (f,\, \overline{g}) = (g,\, \overline{f})$$
ist. Insbesondere ist $\widetilde{T}_f$ genau dann gleich der Nullabbildung, wenn f eine Nullfunktion ist.

Da der SCHWARTZ-Raum ein Untervektorraum von $L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ ist, können wir $\widetilde{T}_f$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ einschränken und die lineare Abbildung
$$T_f\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt \end{cases}$$
betrachten. Mit Hilfe dieser Abbildung wollen wir im folgenden Eigenschaften von f und seiner FOURIER-Transformierten (über deren Existenz wir noch nichts wissen) auf Eigenschaften stark abfallender Funktionen zurückführen.

Die Abbildung T_f existiert nicht nur für quadratintegrierbare Funktionen f, sondern allgemeiner für *jede* Funktion, deren Betrag höchstens polynomial ansteigt:

Lemma: Falls es zu einer stückweise stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Konstanten $k \in \mathbb{N}_0$ und $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so daß
$$|f(t)| \le c \cdot |t|^k$$
ist, existiert $T_f(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Beweis: Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist $t^\ell \varphi(t)$ beschränkt für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$, insbesondere also für $\ell = k$ und $\ell = k+2$. Damit ist auch deren Summe beschränkt, es gibt also eine Konstante $M > 0$, für die
$$\left|t^k(1+t^2)\varphi(t)\right| = \left|t^k\varphi(t) + t^{k+2}\varphi(t)\right| \le M$$
ist. Damit folgt
$$\left|(1+t^2)f(t)\varphi(t)\right| \le \left|(1+t^2)ct^k\varphi(t)\right| \le cM$$
und
$$|f(t)\varphi(t)| \le \frac{cM}{1+t^2}\,.$$
Da
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cM}{1+t^2}\,dt = cM \arctan t\,\Big|_{-\infty}^{\infty} = cM\pi$$
konvergiert, ist auch das Integral $T_f(\varphi)$ über die linke Seite der Gleichung absolut konvergent. ■

Außerdem hat T_f eine Stetigkeitseigenschaft, die wir im Hinblick auf spätere Anwendungen gleich etwas allgemeiner formulieren wollen:

Lemma: $\varphi_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $f, \varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ seien Funktionen derart, daß die Integrale
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi_n(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt$$
existieren. Außerdem sei f beschränkt und
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - \varphi_n(t)|\;dt \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$
Dann ist
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt\,.$$

Beweis: Ist $|f(t)| \le M$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so ist
$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_n(t)\,dt\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot |\varphi(t) - \varphi_n(t)|\;dt$$

$$\le M \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - \varphi_n(t)| \, dt \,,$$

und letztere ist das M-fache einer Nullfolge, also selbst Nullfolge. ∎

Wir wollen dies anwenden auf Funktionen φ aus dem SCHWARTZ-Raum und Funktionen f, die höchstens polynomial ansteigen, die aber nicht notwendigerweise beschränkt sind. Um das zu kompensieren, führen wir für Folgen aus dem SCHWARTZ-Raum einen stärkeren Konvergenzbegriff ein, wobei wir (wie schon bei der Definition einer stark abfallenden Funktion) gleich so viel wie nur irgendwie möglich fordern:

Definition: Eine Folge $\left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergiert gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, wenn für alle $r, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^k \left(\varphi^{(r)}(t) - \varphi_n^{(r)}(t)\right) \right| \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty \,.$$

Wir fordern also, daß *alle* Produkte von t-Potenzen und Ableitungen von φ_n gegen die entsprechende Konstruktion für φ konvergieren. Unter dieser extrem starken Voraussetzung verwundert nicht

Lemma: f sei eine stückweise stetige Funktion, die einer Abschätzung der Form $|f(t)| \le ct^k$ genüge. Dann ist für jede gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergente Folge von Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\lim_{n\to\infty} T_f(\varphi_n) = T_f(\varphi) \,.$$

Beweis: Wir gehen ähnlich vor wie beim Beweis der Existenz von $T_f(\varphi)$: Für jedes $\ell \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^\ell \left(\varphi(t) - \varphi_n(t)\right) \right|$$

eine Nullfolge, es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^\ell \left(\varphi(t) - \varphi_n(t)\right) \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N \,.$$

Insbesondere gibt es solche Werte für $\ell = k$ und für $\ell = k+2$, und damit gibt es auch zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^k (1+t^2)\left(\varphi(t) - \varphi_n(t)\right) \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N \,,$$

d.h.

$$\left| t^k \left(\varphi(t) - \varphi_n(t)\right) \right| < \frac{\varepsilon}{1+t^2} \quad \text{für alle } n > N \text{ und } t \in \mathbb{R} \,.$$

Damit ist

$$\left| T_f(\varphi) - T_f(\varphi_n) \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t)\left(\varphi(t) - \varphi_n(t)\right) \right| dt$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} \left| ct^k \left(\varphi(t) - \varphi_n(t)\right) \right| dt \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c\varepsilon}{1+t^2} \, dt = c\pi \cdot \varepsilon$$

für alle $n > N_0$. Da c und π konstant sind und wir ε beliebig klein machen können, folgt die Behauptung. ∎

Definition: Eine *Distribution* auf dem SCHWARTZ-Raum ist eine lineare Abbildung $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, so daß für jede gegen ein $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergente Folge stark abfallender Funktionen φ_n gilt:

$$\lim_{n\to\infty} T_f(\varphi_n) = T_f(\varphi) \,.$$

Nach dem gerade bewiesenen Lemma ist also T_f für jede stückweise stetige Funktion f, die nicht stärker als ein Polynom wächst, eine Distribution auf dem SCHWARTZ-Raum.

Das sind allerdings bei weitem noch nicht alle Distributionen auf dem SCHWARTZ-Raum: Beispielsweise ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ auch

$$\Delta_a \colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto \varphi(a) \end{cases}$$

eine Distribution: Die Linearität ist klar, und für eine gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergente Folge stark abfallender Funktionen φ_n ist insbesondere

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t) - \varphi_n(t)|$$

eine Nullfolge, erst recht also $|\varphi(a) - \varphi_n(a)|$, so daß es auch mit der Stetigkeit keine Probleme gibt.

Diese Distribution bezeichnet man als DIRACsche Delta-Distribution. Nicht ganz korrekt spricht man auch von einer DIRACschen Delta-Funktion und schreibt, gerade so als sei Δ_a von der Form T_δ,

$$\Delta_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)\,dt \quad \text{und} \quad \Delta_a(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t)\,dt\,.$$

Die Schreibweise $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t) = f(a)$ findet man nicht nur für Funktionen f aus dem SCHWARTZ-Raum, sondern oft auch für beliebige stetige Funktionen f.

PAUL ADRIEN MAURICE DIRAC (1902–1984) wuchs auf in England als Sohn eines Schweizer Vaters und einer englischen Mutter. Trotz großem Interesse an der Mathematik studierte er von 1918–1921 Elektrotechnik an der Universität Bristol, da er auf keinen Fall Lehrer werden wollte. 1921 erhielt er ein Stipendium der Universität Cambridge; da dieses aber nicht zum Leben gereicht hätte, blieb er in Bristol, wo ihn die Universität von Studiengebühren befreite und seinen Wechsel in die Mathematik erlaubte. Ab 1923 arbeitete er in Cambridge an seiner Dissertation über Quantenmechanik, die er 1926 abschloß. 1930 folgte ein Buch über Quantenmechanik, für das er 1933 mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet wurde. 1932 bekam er einen Lehrstuhl für Mathematik an der Universität Cambridge. Nach seiner Emeritierung lebte er in Florida, wo er 1971 Physikprofessor an der Florida State University wurde. Zentrales Thema seiner Arbeiten war die Anwendung mathematischer Methoden auf die Quantenmechanik und die Relativitätstheorie sowie auch Ansätze zur (bis heute nicht befriedigend gelösten) Vereinheitlichung dieser beiden Theorien.

Wenn es wirklich eine *Funktion* $\delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gäbe, für die

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)\,dt = f(0)$$

wäre für jede (stark abfallende oder auch einfach stetige) Funktion f, so müßte $\delta(t)$ für $t \neq 0$ verschwinden – abgesehen eventuell von einigen

isolierten Punkten, die für die Integration bedeutungslos sind. Damit müßte aber unabhängig vom Funktionswert $\delta(0)$ und unabhängig von der Funktion f das Integral verschwinden.

Die „Lösung“, $\delta(0) = \infty$ zu setzen, führt nicht zu einer sinnvollen Interpretation des linksstehenden Integrals, denn wenn man einen Ausdruck wie $2 \cdot \infty$ überhaupt interpretieren kann, dann wohl nur im Sinne von $2 \cdot \infty = \infty$ tun, und damit wäre $2\delta(t) = \delta(t)$, obwohl die Distributionen

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \varphi(0) \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto 2\varphi(0) \end{cases}$$

wohldefiniert und offensichtlich verschieden sind.

Die Schreibweise mit einer „Funktion“ δ ist also in mehrfacher Hinsicht problematisch, hat sich aber gerade in der technischen Literatur eingebürgert und soll daher auch hier verwendet werden. Man sollte sich aber klar machen, daß man nur Ausdrücke wie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-x)f(t)\,dt = f(x)$$

sinnvoll interpretieren kann, in anderen Zusammenhängen hat $\delta(t)$ keine vernünftige Bedeutung.

Problemlos unter einem Integralzeichen sind auch Linearkombinationen der Art

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \delta(t - t_k)\,,$$

denn Linearkombinationen von Distributionen sind wieder Distributionen. Im vorliegenden Fall wäre dies die Distribution

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \Delta_{t_k}\,,$$

für eine stark abfallende Funktion φ ist also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \delta(t-t_k) \right) \varphi(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} a_k \Delta_{t_k}(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi(t_k)\,,$$

und da man zumindest die DIRAC-Distribution auch einfach als lineare Abbildung auf $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ betrachtet, kann man dies auch für eine beliebige stetige Funktion φ sinnvoll interpretieren. So ist beispielsweise

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1)e^{i\omega t}\,dt = e^{i\omega} \quad \text{und}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\big(\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)\big)e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \cos t\,.$$

Da wir nur Distributionen auf dem SCHWARTZ-Raum betrachten, sind auch viele unendliche Linearkombinationen wie etwa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k\Delta_k$$

wohldefiniert, denn für eine stark abfallende Funktion φ konvergieren sowohl

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(k) \quad \text{als auch} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k\varphi(k)\,.$$

Wir können eine Distribution T auf dem SCHWARTZ-Raum nicht nur mit Konstanten multiplizieren, sondern allgemeiner auch mit mit einer beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion g, die höchstens polynomiales Wachstum hat: Für eine Distribution der Form T_f ist

$$T_{gf}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\big(g(t)\varphi(t)\big)\,dt = T_f(g\varphi)\,,$$

da auch $g\varphi$ eine stark abfallende Funktion ist. Somit können wir für eine beliebige Distribution T auf dem SCHWARTZ-Raum das Produkt

$$gT\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto T(g\varphi) \end{cases}$$

definieren. Beispielsweise gehört $t\delta(t)$ zur Distribution

$$t\Delta_0\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \Delta_0(t\varphi) = (t\varphi)(0) = 0\cdot\varphi(0) = 0\,, \end{cases}$$

d.h. $t\delta = 0$. Man überlegt sich leicht, daß für jede Funktion g wie oben gilt $g\delta = g(0)\delta$.

Problematischer ist die Definition eines Produkts von Distributionen: Die obige Rechnung drückt T_{gf} aus durch T_f und g, nicht aber durch T_f und T_g, wie wir es bräuchten, um ein Produkt zweier Distributionen zu definieren. Auch sonstige Versuche, den Ausdruck $T_{gf}(\varphi)$ umzuformen, führen nicht zu brauchbareren Ergebnissen, und in der Tat kann man in der Theorie der Distributionen ein Produkt nur als Linearform auf dem SCHWARTZ-Raum der stark abfallenden Funktionen *zweier* Veränderlicher definieren. Dieser Raum wird weiter hinten zwar kurz erwähnt werden, es würde aber zu weit führen, ihn wirklich zu behandeln. Wir wollen daher nur festhalten, daß Produkte von δ-„Funktionen“ nicht sinnvoll als Distributionen auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ definiert werden können und.

Ähnlich ist es mit Ausdrücken der Form $e^{\delta(t)}$ oder $\sin\delta(t)$: Da beispielsweise

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{f(t)}\varphi(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{\varphi(t)}\,dt$$

nichts miteinander zu tun haben (und $e^{\varphi(t)}$ nicht einmal eine stark abfallende Funktion ist), können wir hier nicht einfach die Exponentialfunktion ins Argument von T_f schieben, und es ist gibt auch keine sonstige Art und Weise, Ausdrücken wie $e^{\delta(t)}$ oder $\sin\delta(t)$ einen Sinn zu geben. Bei der Funktionsschreibweise von Distributionen muß man sich also stets sorgfältig überlegen, ob ein gegebener Ausdruck wirklich sinnvoll ist oder nicht.

c) Die Fourier-Transformierte einer Distribution

f sei eine absolut integrierbare Funktion, d.h. das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$$

konvergiere gegen einen endlichen Wert. Dann ist auch $f(t)e^{-i\omega t}$ absolut integrierbar, da diese Funktion den gleichen Betrag hat wie $f(t)$, und damit konvergiert auch das FOURIER-Integral

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

absolut. Da Multiplikation des Integranden mit einer stark abfallenden Funktion φ nichts an der absoluten Integrierbarkeit ändert, ist auch die lineare Abbildung

$$T_{\widehat{f}}\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\varphi(t)\,dt \end{cases}$$

wohldefiniert, und nach dem Satz von FUBBINI gilt für alle stark abfallenden Funktionen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$T_{\widehat{f}}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\,\varphi(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \right) \varphi(\omega)\,d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{\varphi}(t)\,dt = T_f(\widehat{\varphi})\,.$$

Dies legt folgende Definition nahe:

Definition: Die FOURIER-Transformierte der Distribution $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ ist die Distribution

$$\widehat{T}\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto T(\widehat{\varphi}) \end{cases};$$

die inverse FOURIER-Transformierte von T ist

$$\check{T}\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto T(\check{\varphi}) \end{cases}.$$

Zunächst müssen wir uns überlegen, ob das überhaupt sinnvoll ist:

Lemma: Für eine Distribution $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ sind auch $\widehat{T}$ und $\check{T}$ wieder Distributionen und $\check{\widehat{T}} = \widehat{\check{T}} = T$.

Beweis: Die letzte Aussage folgt sofort aus den Definitionen sowie der entsprechenden Aussage für starkabfallende Funktionen in §7*c)*. Auch die Linearität von $\widehat{T}$ ist klar, da die FOURIER-Transformation auf dem SCHWARTZ-Raum eine lineare Operation ist, d.h. die FOURIER-Transformierte von $\lambda\varphi + \mu\psi$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ist $\lambda\widehat{\varphi} + \mu\widehat{\psi}$.

Für die Stetigkeit von $\widehat{T}$ genügt es wegen der Stetigkeit von T, wenn wir zeigen, daß für eine konvergente Folge von Funktionen $\varphi_n(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit Grenzwert $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ auch die Folge der FOURIER-Transformierten $\widehat{\varphi_n}$ gegen $\widehat{\varphi}$ konvergiert. Wir müssen also zeigen, daß für je zwei Zahlen $k, r \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \left| \omega^k \widehat{\varphi_n}^{(r)}(\omega) - \omega^k \widehat{\varphi}^{(r)}(\omega) \right| = 0\,.$$

Nach den Formeln aus §6*b)* ist

$$\omega^k \widehat{\varphi}^{(r)}(\omega) = \omega^k \cdot (-i)^r \widehat{t^r\varphi}(\omega) = (-i)^r \cdot \omega^k \widehat{t^r\varphi}(\omega)$$

$$= (-i)^r \cdot (-i)^k \widehat{\psi}(\omega) = (-i)^{r+k} \widehat{\psi}(\omega) \quad\text{mit}\quad \psi = \frac{d^k\left(t^r\varphi(t)\right)}{dt^k}\,.$$

Durch k-fache Anwendung der Produktregel folgt, daß ψ Linearkombination von Termen der Form $t^\ell \varphi^{(s)}$ ist. Wegen der Dreiecksungleichung reicht es also, zu zeigen, daß für alle $\ell, s \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \left| \widehat{t^\ell\varphi_n^{(s)}}(\omega) - \widehat{t^\ell\varphi^{(s)}}(\omega) \right| = 0\,.$$

Nach Definition der Konvergenz in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ gibt es zu ℓ, s und jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so daß für $n \geq N_1$ gilt

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^\ell \varphi_n^{(s)}(t) - t^\ell \varphi^{(s)}(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Genauso gibt es auch ein $N_2 \in \mathbb{N}$, so daß für $n \geq N_2$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^{\ell+2} \varphi_n^{(s)}(t) - t^{\ell+2} \varphi^{(s)}(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist; für n größer oder gleich dem Maximum N_0 von N_1 und N_2 gilt also

$$\left|t^\ell\varphi_n^{(s)}(t) - t^\ell\varphi^{(s)}(t)\right| < \frac{\varepsilon}{1+t^2} \qquad \text{und}$$

$$\left|\widehat{t^\ell\varphi_n^{(s)}}(\omega) - \widehat{t^\ell\varphi^{(s)}}(\omega)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(t^\ell\varphi_n^{(s)}(t) - t^\ell\varphi^{(s)}(t)\right)e^{-i\omega t}\,dt\right|$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty}\left|t^\ell\varphi_n^{(s)}(t) - t^\ell\varphi^{(s)}(t)\right|\,dt \le \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \varepsilon\pi\,,$$

der Limes für $n \to \infty$ ist also gleich null, wie behauptet. ■

Um zu sehen, was die neue Definition bringt, wollen wir die FOURIER-Transformierte des Sinus berechnen: Im klassischen Sinne als

$$\widehat{\sin}\,\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\sin t\cdot e^{-i\omega t}\,dt$$

existiert sie bekanntlich nichts. Im Distributionensinne ist

$$\widehat{T}_{\sin}(\varphi) = T_{\sin}(\widehat{\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty}\sin\omega\,\widehat{\varphi}(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i\omega} - e^{-i\omega}\right)\widehat{\varphi}(\omega)\,dt$$

$$= \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\varphi}(\omega)e^{i\omega}\,d\omega - \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\varphi}(\omega)e^{i\omega}\,d\omega$$

$$= \frac{2\pi}{2i}\left(\check{\widehat{\varphi}}(1) - \check{\widehat{\varphi}}(-1)\right) = -\pi i\left(\varphi(1) - \varphi(-1)\right),$$

denn für jede Funktion g ist

$$\check{g}(1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\omega)e^{i\omega}\,d\omega \quad \text{und} \quad \check{g}(-1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\omega)e^{-i\omega}\,d\omega\,.$$

Für die oben eingeführte DIRAC-Distribution gilt

$$\Delta_a(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)\varphi(t)\,dt = \varphi(a)\,,$$

und damit ist

$$\widehat{T}_{\sin} = -\pi i\left(\Delta_1 - \Delta_{-1}\right) = \pi i\left(\Delta_{-1} - \Delta_1\right).$$

Kurz, wenn auch etwas kriminell, können wir dies als

$$\widehat{\sin}(\omega) = \pi i\left(\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)\right)$$

schreiben.

Falls diese Rechnung auf ein sinnvolles Ergebnis führte, sollte

$$\sin t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\sin}\,\omega\cdot e^{i\omega t}\,d\omega$$

sein, und in der Tat ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-\pi i)\left(\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)\right)e^{i\omega t}\,d\omega$$

$$= -\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-1)e^{i\omega t}\,d\omega + \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega+1)e^{i\omega t}\,d\omega$$

$$= -\frac{i}{2}\left(e^{it} - e^{-it}\right) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sin t\,.$$

d) Der Satz von Riesz

Der letzte Abschnitt hat gezeigt, daß die FOURIER-Transformation auf dem Niveau der Distributionen weitgehend unproblematisch ist. Was uns in erster Linie interessiert, sind aber Aussagen über die FOURIER-Transformation auf dem Niveau der *Funktionen;* wir müssen also wissen, wie wir von Distributionen wieder zurückkommen zu Funktionen. Wie das Beispiel der DIRAC-Distribution zeigt, ist das nicht immer möglich; wir müssen uns also zuerst überlegen, was Distributionen der Form T_f mit $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ auszeichnet.

Betrachten wir dazu für $f\in L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ zunächst die lineare Abbildung

$$\widetilde{T}_f\colon\begin{cases} L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})\to\mathbb{C} \\ g\mapsto \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\,dt \end{cases}.$$

Wie im Fall von T_f rechnet man auch hier schnell nach, daß $\widetilde{T}_f$ der Stetigkeitsbedingung

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{T}_f(g_n)=\widetilde{T}_f\big(\lim_{n\to\infty}g_n\big)$$

genügt, hier allerdings für bezüglich der L^2-Norm konvergente Folgen (g_n).

Außerdem ist nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung

$$\big|T_f(g)\big|=|(f,\,\overline{g})|\le\|f\|_2\cdot\|\overline{g}\|_2=\|f\|_2\cdot\|g\|_2\ ,$$

für jede Funktion $g\in L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ läßt sich $\big|T_f(g)\big|$ also abschätzen durch ein von g unabhängiges Vielfaches der L^2-Norm von g.

Diese Eigenschaft hat nicht jede stetige lineare Abbildung von $L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ nach $\mathbb{C}$: Beispielsweise ist für die Fortsetzung

$$\widetilde{\Delta}_0\colon\begin{cases} L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})\to\mathbb{C} \\ g\mapsto g(0) \end{cases}$$

der DIRAC-Distribution Δ_0 auf $L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ und den Rechteckimpuls

$$g_a\colon\begin{cases} \mathbb{R}\to\mathbb{C} \\ t\mapsto\begin{cases} a & \text{falls } |t|\le\frac{1}{a^2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

die L^2-Norm unabhängig von a gleich

$$\|g_a\|_2=\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g_a|^2(t)\,dt}=\sqrt{\int\limits_{-1/a^2}^{1/a^2}a^2\,dt}=\sqrt{2}\,,$$

aber $\Delta_0(g_a)=g_a(0)=a$ kann beliebig große Werte annehmen. Hier kann $|\Delta_0(g)|$ also nicht durch ein konstantes Vielfaches von $\|g\|_2$ abgeschätzt werden.

Definition: Eine lineare Abbildung $T\colon L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})\to\mathbb{C}$ heißt *beschränkt,* wenn es eine Konstante $c\in\mathbb{R}$ gibt, so daß

$$|T(g)|\le c\,\|g\|_2\quad\text{ für alle } g\in L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})\,.$$

Das Infimum aller Zahlen c, die diese Eigenschaft haben, bezeichnen wir als die *Norm* $\|T\|$ von T.

Für $f\in L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ ist $\widetilde{T}_f$ also beschränkt und hat die Norm $\|f\|_2$, denn wie wir gerade gesehen haben, ist $\big|\widetilde{T}_f(g)\big|\le\|f\|_2\cdot\|g\|_2$ für alle g, und speziell für $g=\overline{f}$ ist $\big|\widetilde{T}_f(g)\big|=(f,\overline{\overline{f}})=(f,f)=\|f\|_2^2$.

Das Schöne an quadratintegrierbaren Funktionen ist, daß sich diese Aussage auch umkehren läßt: Zu jeder beschränkten Distribution T gibt es eine Funktion $f\in L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$, so daß $T=\widetilde{T}_f$ ist.

Zum Beweis brauchen wir unter anderem, daß $L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ bis auf das Problem mit den Nullfunktionen ein HILBERT-Raum ist, d.h.

Lemma: In $L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ hat jede CAUCHY-Folge einen Grenzwert.

Dieses Lemma ist, so wie wir $L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ definiert haben, leider falsch; es gilt nur, wenn wir $L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ ersetzen durch den etwas größeren Raum aller LEBESGUE-integrierbarer Funktionen, für die das Integral über das Betragsquadrat endlich bleibt. Da LEBESGUE-Integrale in dieser Vorlesung nicht definiert wurden, muß also hier eine Lücke bleiben; wo es Probleme gibt, zeigt der

„Beweis“: g_n sei eine CAUCHY-Folge von Funktionen aus $L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$, d.h. zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $N>0$, so daß für $n,m\ge N$ gilt

$$\|g_n-g_m\|_2<\varepsilon\,.$$

Offensichtlicher Kandidat für eine Grenzfunktion ist jene Funktion g, die jedem Wert t den Limes der $g_n(t)$ zuordnet; leider gibt es aber zunächst keinen Grund, warum diese Folge von Funktionswerten für jedes t konvergieren sollte. Wir müssen daher etwas härter arbeiten.

Wir verschaffen uns zunächst eine Folge von Werten $\varepsilon_\nu > 0$, für die

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu < \infty$$

konvergiert – beispielsweise können wir $\varepsilon_\nu = \frac{1}{\nu^2}$ setzen. Da (g_n) eine CAUCHY-Folge ist, gibt es zu jedem dieser ε_ν ein n_ν, so daß

$$\|g_n - g_m\|_2 \le \varepsilon_\nu \quad \text{für alle } n, m > n_\nu \,.$$

Insbesondere ist also

$$\left\|g_{n_{\nu+1}} - g_{n_\nu}\right\|_2 \le \varepsilon_\nu \,.$$

Damit ist für jede natürliche Zahl k

$$\sum_{\nu=k}^{\infty} \varepsilon_\nu \ge \lim_{\ell\to\infty} \sum_{\nu=k}^{\ell} \left\|g_{n_{\nu+1}} - g_{n_\nu}\right\|_2 \ge \lim_{\ell\to\infty} \left\| \sum_{\nu=k}^{\ell} (g_{n_{\nu+1}} - g_{n_\nu}) \right\|_2$$
$$= \lim_{\ell\to\infty} \left\|g_{n_{\ell+1}} - g_{n_k}\right\|_2 \,.$$

Da die linke Seite für $k \to \infty$ wegen der Konvergenz der Summe der ε_ν gegen null geht, gilt dies auch für die rechte. Daher muß es eine Funktion g geben, die fast überall mit

$$t \mapsto \lim_{\nu\to\infty} g_{n_\nu}(t)$$

übereinstimmt und für die

$$\lim_{\nu\to\infty} \left\|\widetilde{g} - g_{n_\nu}\right\|_2 = 0$$

ist. Da alle g_{n_ν} in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ liegen, zeigt die Dreiecksungleichung, daß auch g dort liegen muß – falls g integrierbar ist. Man kann zeigen, daß g in jedem Fall LEBESGUE-integrierbar ist, auch wenn die g_n ebenfalls nur LEBESGUE-integrierbar sind; g muß aber nicht RIEMANN-integrierbar sein. Eine letzte Anwendung der Dreiecksungleichung zeigt noch, daß nicht nur die Teilfolge der g_{n_k}, sondern die Folge aller g_n in der L^2-Norm gegen g konvergiert. ■

Damit kommen wir zum eigentlich interessanten

Satz von Riesz: Zu jeder beschränkten und stetigen linearen Abbildung $T\colon \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ gibt es eine Funktion $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, so daß $T = \widetilde{T}_f$ ist und $\|f\|_2 = \|T\|$. Die Funktion f ist bis auf Nullfunktionen eindeutig bestimmt.

Der *Beweis* ist etwas langwierig, aber seine Grundidee ist einfach:

Angenommen, wir betrachteten anstelle von $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ den endlichdimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ und eine lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Dann wissen wir natürlich, daß sich $T(\vec{x})$ schreiben läßt als

$$T(\vec{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

mit geeigneten reellen Zahlen a_1, a_2 und a_3. Diese können wir zusammenfassen zu einen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, für den

$$T(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}$$

ist. Dieser Vektor $\vec{a}$ entspricht der gesuchten Funktion f; er steht offensichtlich senkrecht auf dem Untervektorraum

$$E = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; T(\vec{x}) = 0\right\},$$

der außer für $\vec{a} = \vec{0}$ eine Ebene beschreibt, und er ist durch E bis auf eine Proportionalitätskonstante eindeutig bestimmt.

In Analogie dazu betrachten wir auch für den Satz von RIESZ den Kern

$$N \underset{\text{def}}{=} \left\{g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \;\middle|\; T(g) = 0\right\}$$

von T. Falls $N = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist, sind wir fertig: Dann verschwindet $T(g)$ überall, und $f \equiv 0$ erfüllt alle Behauptungen.

Andernfalls gibt es eine Funktion $h \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, die nicht in N liegt.

Der erste und umständlichste Beweisschritt besteht darin, daß wir uns überlegen, daß es in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \setminus N$ auch eine Funktion $\widetilde{f}$ gibt, die auf N senkrecht steht, für die also $(\widetilde{f}, g) = 0$ ist für alle $g \in N$.

Dazu betrachten wir den Abstand $d \underset{\text{def}}{=} \inf_{g\in N} \|h - g\|_2$ von g und h.

Zur Erinnerung: In der Schule definiert man den Abstand eines Punkts von einer Ebenen als den Abstand zum nächstgelegenen Punkt der Ebenen. Dieser Punkt ist der Fußpunkt des Lots vom gegebenen Punkt auf die Ebene; der Verbindungsvektor steht also senkrecht auf der Ebenen. Bei einem unendlichdimensionalen Raum wie N können wir nicht sicher sein, daß es so etwas wie einen „Lotfußpunkt“ gibt – in der Tat besteht die Hauptarbeit des ersten Beweisschritts genau darin, dies zu zeigen. Deshalb können wir (noch) nicht von einem minimalen Abstand reden, sondern müssen uns zunächst mit einem Infimum begnügen. Wir hoffen aber (zu recht, wie sich bald zeigen wird), daß der „Lotfußpunkt“ auch in unserem Fall existiert und daß der „Lotvektor“ senkrecht auf N steht.

Obwohl h nicht in N liegt, können wir zumindest *a priori* nicht sicher sein, daß obiges Infimum positiv ist – wenn wir anstelle einer *beschränkten* stetigen linearen Abbildung T beispielsweise die stetige lineare Abbildung $\widetilde{\Delta}_0$ betrachten würden, wäre $d = 0$.

Da unser T aber beschränkt ist, haben wir eine Konstante $c > 0$, so daß

$$|T(g)| \le c\,\|g\|_2 \quad \text{für alle } g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})\ .$$

Insbesondere ist für jedes $g \in N$

$$|T(h)| = |T(h) - T(g)| = |T(h-g)| \le c\,\|h-g\|_2\ .$$

$T(h)$ verschwindet nicht, da h nicht in N liegt; folglich ist

$$\|h-g\|_2 \ge \left|\frac{T(h)}{c}\right| \quad \text{für alle } g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})\ .$$

Damit ist auch das Infimum d aller dieser Werte größer oder gleich $|T(h)|\,/c$, also positiv.

Ein Infimum muß nicht angenommen werden, man kann ihm aber beliebig nahekommen. Somit gibt es eine Folge (g_n) von Funktionen aus N, so daß $\lim_{n\to\infty} \|h-g_n\|_2 = d$ ist.

Eine (ziemlich langweilige) Abschätzung zeigt, daß diese Folge eine CAUCHY-Folge ist, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n_0, so daß

$$\|g_m - g_n\|_2 \le \varepsilon \quad \text{für } n, m > n_0\ .$$

Die Einzelheiten seien zum leichteren Überlesen im Kleindruck angegeben:

Zunächst ist für beliebige Funktionen p und q

$$\|p+q\|_2^2 = (p+q,\ p+q) = (p,\ p) + (p,\ q) + (q,\ p) + (q,\ q)$$

und

$$\|p-q\|_2^2 = (p-q,\ p-q) = (p,\ p) - (p,\ q) - (q,\ p) + (q,\ q)\ ,$$

also

$$\|p+q\|_2^2 + \|p-q\|_2^2 = 2\left(\|p\|_2^2 + \|q\|_2^2\right)\ .$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\|g_m - g_n\|_2^2 &= \|(h-g_m) - (h-g_n)\|_2^2\\ &= 2\left(\|h-g_m\|_2 + \|h-g_n\|_2^2\right) - \|2h - g_m - g_n\|_2^2\\ &= 2\left(\|h-g_m\|_2 + \|h-g_n\|_2^2\right) - 4\left\|h - \frac{g_m-g_n}{2}\right\|_2^2\\ &\le 2\left(\|h-g_m\|_2 + \|h-g_n\|_2^2\right) - 4d^2\ ,\end{aligned}$$

denn mit g_m und g_n liegt auch $(g_m+g_n)/2$ in N, hat also mindestens Abstand d von h.

Da für die Folge der g_n die Abstände $\|h-g_n\|_2$ gegen d konvergiert, konvergiert auch die Folge der Abstandsquadrate gegen d^2, und es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0, so daß

$$\|h-g_n\|_2^2 \le d^2 + \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für } n > n_0\ .$$

Für $n, m > n_0$ ist daher

$$\|g_m - g_n\|_2^2 \le 2\left(d^2 + \frac{\varepsilon}{4} + d^2 + \frac{\varepsilon}{4}\right) - 4d^2 = \varepsilon\ ,$$

wie behauptet.

Da in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ nach dem vorigem Lemma jede CAUCHY-Folge konvergiert, folgt daß der Grenzwert

$$\widetilde{g} = \lim_{n\to\infty} g_n$$

in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ existiert. Da

$$T\left(\widetilde{g}\right) = T\left(\lim_{n\to\infty} g_n\right) = \lim_{n\to\infty} T(g_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

ist, liegt $\widetilde{g}$ in N.

Die Funktion $\widetilde{g}$ entspricht dem „Lotfußpunkt“; der „Lotvektor“

$$\widetilde{f} = h - \widetilde{g}\ ,$$

von dem wir bislang nur wissen, daß $\|\widetilde{f}\|_2 = d$ ist, sollte also orthogonal zu N sein.

Für eine beliebige Funktion $g \in N$ und eine reele Zahl $\lambda \neq 0$ betrachten wir den Abstand

$$\|h - (\widetilde{g} + \lambda g)\|_2 \,.$$

Da $\widetilde{g} + \lambda g$ in N liegt, ist dieser Abstand mindestens gleich d, d.h.

$$d^2 \le \|h - (\widetilde{g} + \lambda g)\|_2^2 = \|(h - \widetilde{g}) - \lambda g\|_2^2 = \|\widetilde{f} - \lambda g\|_2^2$$
$$= (\widetilde{f} - \lambda g,\ \widetilde{f} - \lambda g) = \|\widetilde{f}\|_2 + \lambda^2 \|g\|_2^2 - \lambda(g,\ \widetilde{f}) - \overline{\lambda}(\widetilde{f},\ g)\,.$$

Da $\|\widetilde{f}\|_2 = d^2$ und $\overline{\lambda} = \lambda$ ist, folgt nach Division durch λ, daß

$$0 \le \lambda \|g\|_2^2 - \Big((g,\ \widetilde{f}) + (\widetilde{f},\ g)\Big) = \lambda \|g\|_2^2 - \Big((g,\ \widetilde{f}) + \overline{(g\ \widetilde{f})}\Big)$$
$$= \lambda \|g\|_2^2 - 2\,\mathfrak{Re}(g,\ \widetilde{f})$$

für alle reellen $\lambda \neq 0$. Lassen wir λ, sowohl von links, als auch von rechts, gegen null gehen, folgt also

$$\mathfrak{Re}(g,\ \widetilde{f}) = 0\,.$$

Die Funktion $g \in N$ war beliebig; da mit g auch ig in N liegt, ist also auch

$$\mathfrak{Re}(ig,\ \widetilde{f}) = \mathfrak{Re}\Big(i \cdot (g,\ \widetilde{f})\Big) = -\,\mathfrak{Im}(g,\ \widetilde{f}) = 0\,,$$

also verschwindet auch der Imaginärteil von $(g,\ \widetilde{f})$ und damit $(g,\ \widetilde{f})$ selbst. $\widetilde{f}$ steht also in der Tat senkrecht auf allen $g \in N$.

$\widetilde{f}$ ist nur bis auf eine Konstante bestimmt; wir wollen uns überlegen, daß

$$f \underset{\text{def}}{=} \frac{T(\widetilde{f})}{\|\widetilde{f}\|^2} \cdot \overline{\widetilde{f}}$$

das richtige Vielfache mit $T_f = T$ ist: Für $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ ist

$$\widetilde{T}_f(g) = (g,\ \overline{f}) = \left(g,\ \frac{\overline{T(\widetilde{f})}}{\|\widetilde{f}\|^2} \cdot \overline{\overline{\widetilde{f}}}\right) = \left(g,\ \frac{\overline{T(\widetilde{f})}}{\|\widetilde{f}\|^2} \cdot \widetilde{f}\right)$$
$$= \frac{T(\widetilde{f})}{\|\widetilde{f}\|^2}(g,\ \widetilde{f})\,.$$

Insbesondere ist also $\widetilde{T}_f(g) = 0$ für alle $g \in N$ nach Konstruktion von $\widetilde{f}$.

Für ein Vielfaches $\lambda\widetilde{f}$ von $\widetilde{f}$ ist

$$\widetilde{T}_f(\lambda\widetilde{f}) = \frac{T(\widetilde{f})}{\|\widetilde{f}\|^2}\big(\lambda\widetilde{f},\ \overline{\widetilde{f}}\big) = \frac{T(\widetilde{f})}{\|\widetilde{f}\|^2}\lambda\,\|\overline{f}\|_2^2 = \lambda T(\widetilde{f}) = T(\lambda\widetilde{f})\,,$$

auch in diesem Fall stimmen T_f und T somit überein. Wegen der Linearität von T und von $\widetilde{T}_f$ ist daher

$$\widetilde{T}_f(g + \lambda\widetilde{f}) = T(g + \lambda\widetilde{f}) \quad \text{für alle } g \in \mathbb{N},\ \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Eine beliebige Funktion $h \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ können wir in der Form

$$h = \left(h - \frac{T(h)}{T(\widetilde{f})}\widetilde{f}\right) + \frac{T(h)}{T(\widetilde{f})}\widetilde{f}$$

darstellen. Da

$$T\left(h - \frac{T(h)}{T(\widetilde{f})}\widetilde{f}\right) = T(h) - \frac{T(h)}{T(\widetilde{f})}T(\widetilde{f}) = T(h) - T(h) = 0$$

verschwindet, liegt der erste Summand in N, und der zweite ist natürlich ein Vielfaches von $\widetilde{f}$. Also läßt sich jede quadratintegrierbare Funktion darstellen als Summe einer Funktion aus N und einem Vielfachen von $\widetilde{f}$, die linearen Abbildungen T und $\widetilde{T}_f$ stimmen also überein.

Damit sind wir fast fertig: Wenn $T = \widetilde{T}_f$ ist, haben beide Abbildungen natürlich auch dieselbe Norm, und wir wissen bereits, daß $\widetilde{T}_f$ dieselbe Norm hat wie f, d.h.

$$\|T\| = \|\widetilde{T}_f\| = \|f\|_2\,.$$

■

FRIGYES RIESZ (1880–1956) studierte Mathematik in Budapest, Göttingen und Zürich. 1902 promovierte er in Budapest mit einer Arbeit über Geometries, 1911 wurde er Professor an der damals ungarischen Universität Kolozsvár. Nachdem Kolozsvár 1920 rumänisch wurde, zog er mit der Universität um nach Szeged. 1945 bekam er einen Lehrstuhl an der Universität Budapest.

RIESZ ist einer der Väter der *Funktionalanalysis*, jener mathematischen Disziplin also, die Funktionenräume mit analytischen Methoden untersucht und insbesondere auch fundamental für die FOURIER-Analysis ist. Den obigen Satz bewies er 1907.

e) Die Plancherel-Formel

Der Satz von RIESZ sagt uns, wann lineare Funktionen auf $L^2(\mathbb{R}, C)$ in der Form $\widetilde{T}_f$ geschrieben werden können mit einer Funktion f aus $L^2(\mathbb{R}, C)$. Da wir die FOURIER-Theorie auf $L^2(\mathbb{R}, C)$ zurückführen wollen auf die für Distributionen auf dem SCHWARTZ-Raum, müssen wir wir daher versuchen, solche Distributionen auf $L^2(\mathbb{R}, C)$ fortzusetzen. Als erstes wollen wir uns dazu überlegen, daß wir jede Funktion aus $L^2(\mathbb{R}, C)$ als Grenzwert einer Folge von Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ schreiben können.

Wir beginnen mit dem Beispiel des Rechteckimpulses

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } a \le t \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

der offensichtlich in $L^2(\mathbb{R}, C)$ liegt, wegen der beiden Unstetigkeitsstellen aber natürlich nicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Wir kennen bereits eine Funktion in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, die auch außerhalb des Intervalls $[a, b]$ verschwindet und in dessen Innern positiv ist, nämlich die Funktion

$$g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} e^{\frac{-1}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Allgemeiner hat für jede reelle Zahl $r > 0$ auch

$$g_r\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} e^{\frac{-r}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

dieselbe Eigenschaft. Da $(t-a)(b-t)$ bei $t = (a+b)/2$ maximal wird, hat g_r dort sein einziges Maximum und

$$g_r\left(\frac{a+b}{2}\right) = e^{\frac{-4r}{(b-a)^2}}.$$

Unser Rechteckimpuls hat eins als Maximalwert; deshalb betrachten wir besser anstelle der g_r die mit dem Kehrwert des Maximums multiplizierten Funktionen

$$f_r\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} e^{\frac{4r}{(b-a)^2}}\, e^{\frac{-r}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases},$$

die alle bei $(a+b)/2$ ihren Maximalwert eins annehmen.

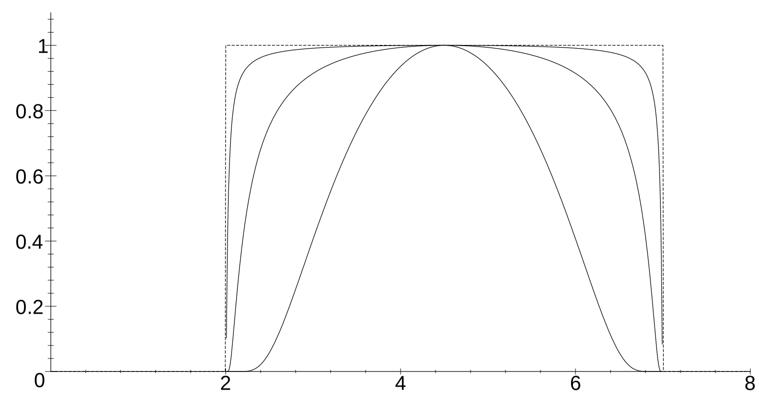

Abb. 24: Approximation des Rechteckimpulses durch stark abfallende Funktionen

Abbildung 24 zeigt für $a = 2$ und $b = 7$ die entsprechenden Funktionen mit $r = 10$, $r = 1$ und für $r = 0{,}1$. Die innerste Kurve für $r = 10$ zeigt noch ein klar ausgeprägtes Maximum, die Kurve für $r = 1$ ist schon deutlich flacher im mittleren Teil, und die für $r = 0{,}1$ schließlich erinnert schon recht gut an den Rechteckimpuls f.

Diese Abbildung legt die Vermutung nahe, daß die f_r für $r \to 0$ in der L^2-Norm gegen f konvergieren. Leider können wir aber $\|f - f_r\|_2$ nicht ausrechnen, da wir keine Stammfunktion von f_r kennen. (Schon e^{-t^2} ist schließlich nicht elementar integrierbar.) Deshalb müssen wir uns mit Abschätzungen begnügen. Wir erwarten, daß f_r im mittleren Bereich immer besser mit der Geraden auch Höhe eins übereinstimmt, während es am Rand des Intervalls immer steiler gegen null geht. Daher wählen wir ein $\delta > 0$ und betrachten getrennt denn mittleren Teil $[a+\delta, b-\delta]$ des Intervalls und die beiden Randintervalle $[a, a+\delta]$ und $[b-\delta, b]$.

Über das Verhalten von f_r in den Randintervallen können wir so gut wie nichts sagen; wir wissen nur, daß auf jeden Fall $0 \le f_r(t) \le 1$ ist und schätzen die Differenz zwischen $f(t) = 1$ und $f_r(t)$ daher ab durch eins.

Im mittleren Intervall ist die Differenz zwischen $f(t)$ und $f_r(t)$ im Intervallmittelpunkt $(a+b)/2$ gleich null und wächst dann, wie man sich durch Ableiten von f_r leicht überzeugt, monoton. Insbesondere ist f_r monoton wachsend sowohl in $t - a$ als auch in $b - t$; wir erhalten daher für das mittlere Intervall eine untere Schranke, wenn wir für beide Differenzen den Wert δ einsetzen, was auf

$$e^{\frac{4r}{(b-a)^2}} e^{\frac{-r}{\delta(1-\delta)}} = e^{-r\left(\frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2}\right)}$$

führt. Für $t \in [a+\delta, b-\delta]$ gilt daher

$$f(t) - f_r(t) \le 1 - e^{-r\left(\frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2}\right)} .$$

Dieser Ausdruck ist nicht sehr angenehm, wir wollen ihn noch weiter abschätzen. Nach Konstruktion von f_r ist der Exponent negativ, und für alle $x \ge 0$ ist $1 - e^{-x} \le x$, denn dies gilt für $x = 0$, und die Ableitung

e^{-x} von $1 - e^{-x}$ ist für jedes positive x kleiner als die Ableitung eins von x. Daher ist für $t \in [a+\delta, b-\delta]$

$$\begin{aligned} f(t) - f_r(t) &\le 1 - e^{-r\left(\frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2}\right)} \\ &\le r\left(\frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2}\right) . \end{aligned}$$

Wir interessieren uns vor allem für kleine Werte von δ; deshalb betrachten wir im folgenden nur noch Werte $\delta \le \frac{1}{2}$. Dann ist $1 - \delta \ge \frac{1}{2}$ und

$$f(t) - f_r(t) \le r\left(\frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)^2}\right) .$$

Damit können wir die L^2-Norm der Differenz abschätzen:

$$\begin{aligned} \|f - f_r\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_r(t)|^2 \, dt \\ &= \int_a^{a+\delta} |f(t) - f_r(t)|^2 \, dt + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(t) - f_r(t)|^2 \, dt \\ &\quad + \int_{b-\delta}^{b} |f(t) - f_r(t)|^2 \, dt \\ &\le \delta + r^2(b-a)\left(\frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)^2}\right)^2 + \delta . \end{aligned}$$

Setzen wir hier speziell $\delta = \sqrt{r}$, was wir für hinreichend kleine r dürfen, so wird dies zu

$$\begin{aligned} &\sqrt{r} + r^2(b-a)\left(\frac{2}{\sqrt{r}} - \frac{4}{(b-a)^2}\right)^2 + \sqrt{r} \\ &= 2\sqrt{r} + r(b-a)\left(2 - \frac{4\sqrt{r}}{(b-a)^2}\right)^2 , \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck geht gegen null für $r \to 0$. Also konvergieren die f_r für $r \to \infty$ in der L^2-Norm gegen f.

Der Vollständigkeit halber wollen wir uns noch überlegen, daß auch die Fläche zwischen den Graphen von f_r und von f für $r \to \infty$ gegen null geht: Wenn wir wie eben vorgehen, erhalten wir die Ungleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_r(t)|\ dt \le \delta + r(b-a)\left(\frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)^2}\right) + \delta\,,$$

und wenn wir hier wieder spezialisieren auf $\delta = \sqrt{r}$ wird dies zu

$$\sqrt{r}\left(2 + (b-a)\left(2 - \frac{4\sqrt{r}}{(b-a)^2}\right)\right)\,,$$

was für $r \to \infty$ gegen null geht.

Da f sowie sämtliche f_r außerhalb des Intervalls $[a, b]$ verschwinden, geht damit auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_r(t)|\ dt$$

für $r \to \infty$ gegen null. Dieses Integral bezeichnet man als die L^1-Norm von $f - f_r$; die Folge der Funktionen f_r konvergiert also auch in der L^1-Norm gegen f.

Diese Annäherung des Rechteckimpulses durch stark abfallende Funktionen wollen wir im nächsten Lemma auf beliebige quadratintegrierbare Funktionen ausdehnen:

Lemma: Zu jeder Funktion $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gibt es eine Folge von Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, so daß

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \varphi_n\|_2 = 0$$

ist; f läßt sich also bezüglich der L^2-Norm beliebig gut durch stark abfallende Funktionen annähern.

Beweis: In einem ersten Schritt sollten wir uns überlegen, daß f bezüglich der L^2-Norm als Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen τ_n mit jeweils nur endlich vielen Sprungstellen dargestellt werden kann.

Da f nach Voraussetzung integrierbar ist, können wir die Funktion zumindest auf jedem endlichen Intervall durch solche Treppenfunktionen annähern, und indem wir die Intervallgrenzen gegen unendlich gehen lassen, gilt dasselbe für ganz f. Der Beweis, daß wir so eine Folge von Treppenfunktionen bekommen, die *bezüglich der* L^2*-Norm* gegen f konvergiert ist ziemlich technisch und muß die ganze Konstruktion des RIEMANN-Integrals nachvollziehen; wir wollen daher auf die Einzelheiten verzichten und obige Aussage einfach glauben.

Jede der Treppenfunktionen τ_n ist eine Summe von endlich vielen Rechteckimpulsen R_{ni}, von denen wiederum jeder als Grenzwert einer Folge $(\psi_{nij})_{j\in\mathbb{N}}$ stark abfallender Funktionen geschrieben werden kann. Mit

$$\varphi_{nj} = \sum_i \psi_{nij}$$

ist dann auch

$$\lim_{j\to\infty} \varphi_{nj} = \lim_{j\to\infty} \sum_i \psi_{nij} = \sum_i R_{ni} = \tau_n\,,$$

denn die Summen über i sind endlich. Genau deshalb liegen die Funktionen φ_{ni} auch in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, und damit ist

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{nn} = \lim_{n\to\infty} \tau_n = f\,,$$

wie behauptet. ■

Korollar: Zu jeder Distribution $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ gibt es eine stetige lineare Abbildung $\widetilde{T}\colon \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, die auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ mit T übereinstimmt.

Beweis: Jede Funktion $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ läßt sich als Limes einer Folge φ_n stark abfallender Funktionen schreiben; wir setzen einfach

$$\widetilde{T}(f) = \lim_{n\to\infty} T(\varphi_n)\,.$$

■

Damit haben wir alle Vorbereitungen zusammen und können endlich beweisen, worauf es wirklich ankommt:

Satz von Plancherel: Zu jeder Funktion $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gibt es Funktionen $\widehat{f}$ und $\check{f}$ in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, so daß

$$\widehat{T}_f = T_{\widehat{f}} \quad \text{und} \quad \check{T}_f = T_{\check{f}}$$

ist; FOURIER-Transformierte und inverse FOURIER-Transformierte von f existieren also als Funktionen. $\check{\widehat{f}}$ und f unterscheiden sich höchstens durch eine Nullfunktion. Außerdem ist

$$\left\|\widehat{f}\right\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2 \quad \text{und} \quad \left\|\check{f}\right\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\|f\|_2\ .$$

Beweis: Nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung ist für jede stark abfallende Funktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\left|\widehat{T}_f(\varphi)\right| = \left|T_f(\widehat{\varphi})\right| = \left|(f, \overline{\widehat{\varphi}})\right| \le \|f\|_2\,\|\widehat{\varphi}\|_2\ .$$

Wie wir aus §7*c)* wissen, ist $\|\widehat{\varphi}\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|\varphi\|_2$, also

$$\left|\widehat{T}_f(\varphi)\right| \le \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2\,\|\varphi\|_2\ .$$

Nach dem Satz von RIESZ gibt es daher eine Funktion $\widehat{f} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, für die

$$\widehat{T}_f = T_{\widehat{f}}$$

ist. Ihre Norm ist gleich der von $\widehat{T}_f$, also ist nach obiger Abschätzung

$$\left\|\widehat{f}\right\|_2 \le \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2\ .$$

Genauso zeigt man auch die Existenz von $\check{f}$ und daß gilt

$$\left\|\check{f}\right\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\|f\|_2\ .$$

Da die Distributionen $\check{\widehat{T}}$ und T übereinstimmen, unterscheiden sich $\check{\widehat{f}}$ und f höchstens durch eine Nullfunktion, haben also insbesondere dieselbe Norm. Nach den bislang bewiesenen Ungleichungen ist

$$\left\|\check{\widehat{f}}\right\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|\widehat{f}\right\|_2 \le \|f\|_2\ ;$$

da links und rechts dieselbe Zahl steht, muß in beiden Ungleichungen das Gleichheitszeichen gelten, und der Satz ist bewiesen. ∎

MICHEL PLANCHEREL (1885–1967) war Professor für höhere Mathematik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, publizierte seine Arbeiten aber in französischer Sprache. Diese befassen sich nicht nur mit der der FOURIER-Theorie einer und mehrerer Veränderlicher, sondern enthalten beispielsweise auch wichtige Sätze aus der sogenannten Ergodentheorie, der allgemeinen Theorie dynamischer Systeme. Seine letzte, 1962 erschienene Arbeit, befaßt sich mit dem Einfluß der Steuergesetze auf die Stabilität einer Volkswirtschaft. Den obigen Satz bewies er 1910; oft wird auch nur dessen letzte Aussage als PLANCHEREL-Formel bezeichnet.

Der gerade bewiesene Satz sagt uns also, daß die FOURIER-Transformation auch auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ zumindest bis auf Nullfunktionen wohldefiniert ist, was für die meisten Zwecke genügt. Außerdem gibt er uns eine Aussage über die Normen, die dem Satz von PARSEVAL aus der Theorie der FOURIER-Reihen periodischer Funktionen entspricht und die Aussage, daß FOURIER-Transformation und inverse FOURIER-Transformation zumindest bis auf Nullfunktionen tatsächlich invers zueinander sind.

Gelegentlich wollen wir aber die FOURIER-Transformation an einer bestimmten Stelle wirklich kennen, und dazu ist der obige Satz zu schwach: Da die Distribution T_f die Funktion F nur bis auf Nullfunktionen eindeutig bestimmt, legt T_f für kein einziges Argument t den Wert $f(t)$ wirklich fest.

Im Rest dieses Abschnitts wollen wir uns überlegen, daß auch der Funktionswert von f an allen Stetigkeitsstellen von f durch T_f eindeutig bestimmt ist.

Wir gehen also aus von zwei stückweise stetige Funktionen f und g mit $T_f = T_g$ ist. Für jede stark abfallende Funktion φ ist dann

$$T_f(\varphi) = T_g(\varphi) \quad \text{oder} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\varphi(t)\,dt\ .$$

Dies wollen wir anwenden auf die zu Beginn dieses Abschnitt betrachteten Funktionen und dort einfach mit f_r bezeichneten Funktionen

$$\varphi_{a,b,r}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} e^{\frac{4r}{(b-a)^2}}\, e^{\frac{-r}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases},$$

von denen wir dort gezeigt hatten, daß sie für feste Werte von a, b und ein variables $r > 0$ für $r \to 0$ gegen den Rechteckimpuls

$$R_{a,b}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } a \le t \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

konvergieren. Diese Konvergenz haben wir sowohl bezüglich der L^2-Norm als auch bezüglich der L^1-Norm nachgerechnet. Wegen letzterer können wir aus den Gleichungen

$$T_f(\varphi_{a,b;r}) = T_g(\varphi_{a,b;r})$$

oder

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) R_{a,b}(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) R_{a,b}(t)\, dt$$

schließen, daß auch

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b g(t)\, dt \quad \text{für alle } a, b\,.$$

Als integrierbare Funktionen haben f und g Stammfunktionen F und G; damit ausgedrückt ist

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}\,.$$

(Strenggenommen haben wir das nur gezeigt für $b > a$, aber im Falle $b < a$ können wir einfach obige Überlegung für das Intervall $[b, a]$ wiederholen.) Setzen wir $b = a + h$, so gilt daher auch

$$F(a+h) - F(a) = G(a+h) - G(a)$$

und

$$\frac{F(a+h) - F(a)}{h} = \frac{G(a+h) - G(a)}{h}$$

für alle $a, h \in \mathbb{R}$ mit $h \neq 0$.

Lassen wir in dieser Gleichung h gegen null gehen, erhalten wir, sofern F *bzw.* G im Punkt a differenzierbar ist, den Wert der jeweiligen Ableitung im Punkt a.

Falls die Funktionen f und g in der Umgebung eines Punkts stetig sind, habe sie dort differenzierbare Stammfunktionen und sind gleich deren ableitung; damit ist

$$f(t) = g(t) \quad \text{falls } f \text{ und } g \text{ im Punkt } t \text{ stetig sind.}$$

Die Funktionen f und g können sich also höchstens an ihren Unstetigkeitsstellen unterscheiden.

Sind f und g sogar stetig, ist also $f = g$, und das gilt auch, wenn sowohl f als auch g nur stückweise stetig sind und zusätzlich die in §4*e)* betrachtete Mittelwerteigenschaft

$$f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \quad \text{und} \quad g(t) = \frac{g(t^+) + g(t^-)}{2}$$

erfüllen, denn die links- und rechtsseitigen Grenzwerte hängen nur von den Werten ab, die die Funktionen an Stellen annehmen, an denen sie stetig sind.

Das wird uns in den meisten Fällen reichen, insbesondere wenn wir uns auf absolut integrierbare Funktionen beschränken:

Lemma: Ist die Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ absolut integrierbar, so existiert die FOURIER-Transformierte von f als Funktion; diese Funktion ist stetig und beschränkt.

Beweis: Nach Definition ist

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt\,.$$

Der Betrag des Integranden ist $|f(t)|$; da f absolut integrierbar ist, konvergiert das Integral absolut und ist damit insbesondere konvergent.

Der Integrand $f(t)e^{-i\omega t}$ ist als Funktion von ω für jeden Wert von t stetig und als Funktion von t immerhin noch stückweise stetig. Daher zeigt das Lemma aus §6*a)* zunächst, daß für Intervalle $[a,b]$, in denen f stetig ist, auch

$$\int_a^b f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

eine stetige Funktion von ω ist. Damit gilt dasselbe für jedes endliche Intervall, denn endliche Summen stetiger Funktionen sind wieder stetig. Für $a \to -\infty$ und $b \to \infty$ schließlich konvergiert das Integral nach Voraussetzung absolut, also auch gleichmäßig, und damit ist auch die Grenzfunktion $\widehat{f}(\omega)$ stetig und beschränkt. ■

Damit folgt insbesondere der z.B. für die Identifikation von Lösungen von Differentialgleichungen wichtige

Satz: $f, g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ seien stetige Funktionen.
a) Falls die FOURIER-Transformierten $\widehat{f}$ und $\widehat{g}$ übereinstimmen, ist $f = g$.
b) Falls es ein $r > 0$ gibt, so daß $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathfrak{Re}\, s = r$, ist $f(t) = g(t)$ für alle $t > 0$.

Beweis: a) folgt unmittelbar aus dem gerade bewiesenen Lemma, und *b)* folgt daraus, daß man dieses Lemma auf die Funktionen

$$f_r\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ f(t)e^{-rt} & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

und

$$g_r\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ g(t)e^{-rt} & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

anwendet, die zumindest für $t > 0$ stetig sind, und deren FOURIER-Transformationen gerade die LAPLACE-Transformationen von f und g für $\mathfrak{Re}\, s = r$ sind. ■

f) Ableitungen von Distributionen

Wie wir in §6*b)* gesehen haben, ist für alle mindestens r-fach stetig differenzierbare Funktionen f, sofern alle vorkommenden FOURIER-Transformierten existieren,

$$\frac{d^r}{d\omega^r}\widehat{f}(\omega) = (-i)^r\,\widehat{t^r f}(\omega)$$

und

$$\omega^r \widehat{f}(\omega) = (-i)^r\,\widehat{f^{(r)}}(\omega)\,;$$

eine ähnliche, leicht komplexere Formel gilt auch für die LAPLACE-Transformation. Dies hatten wir im weiteren Verlauf von §6 zur Lösung erster Differentialgleichungen verwendet.

Inzwischen können wir die Voraussetzungen etwas präziser formulieren; insbesondere ist klar, daß diese Formeln für alle stark abfallenden Funktionen und alle $r \in \mathbb{N}$ gelten. Auch wissen wir, daß sie für quadratintegrierbare Funktionen gelten, *falls* auch alle Ableitungen bis zur jeweils betrachteten quadratintegrierbar sind.

In diesem Paragraphen wollen wir uns überlegen, wie man diesen Formeln auch für *beliebige* quadratintegrierbare Funktionen mit Hilfe von Distributionen zumindest bis auf Nullfunktionen einen Sinn geben kann.

Dazu überlegen wir uns zunächst, was Ableitungen auf dem Niveau der Distributionen bedeuten, wie man also beispielsweise eine Ableitung der DIRACschen δ-Distribution definieren kann. Es ist klar, daß ein Ansatz wie

$$\dot{\delta}(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h}$$

zu keinem vernünftigen Ergebnis führen kann; wir müssen unserer alten Strategie folgen und für eine differenzierbare Funktion f die Distribution $T_{\dot f}$ ausrechnen in der Hoffnung, daß dies zu einer Formel führt, die sich auf beliebige Distributionen verallgemeinern läßt.

Für eine differenzierbare Funktion f mit der Eigenschaft, daß sowohl f als auch die Ableitung $\dot f$ höchstens polynomiales Wachstum haben, ist

$$T_{\dot f}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot f(t)\varphi(t)\,dt\,.$$

definiert und nach der Regel für partielle Integration ist

$$T_{\dot f}(\varphi) = f(t)\varphi(t)\,\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\infty}^{\infty} f(t)\dot\varphi(t)\,dt\,.$$

Da f höchstens polynomiales Wachstum hat, ist $|f(t)|$ kleiner oder gleich einem Ausdruck der Form $c\,|t|^k$ für eine reelle Zahl $c > 0$ und eine natürliche Zahl k. Da außerdem φ eine stark abfallende Funktion ist, bleibt $\left|t^{k+1}\varphi(t)\right|$ beschränkt für alle t, d.h.

$$|\varphi(t)| \le \frac{M}{|t|^{k+1}}$$

für eine reelle Zahl $M > 0$. Damit ist

$$|f(t)\varphi(t)| \le \left|ct^k \cdot \frac{M}{t^{k+1}}\right| \le \frac{cM}{|t|}\,.$$

Somit geht das Produkt $\varphi(t)f(t)$ gegen Null für $t \to \pm\infty$ und

$$T_{\dot f}(\varphi) = -\int_{\infty}^{\infty} f(t)\dot\varphi(t)\,dt = -T_f(\dot\varphi)\,.$$

Damit ist klar, wie wir die Ableitung einer Distribution definieren:

Definition: Die Ableitung einer Distribution $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ ist die Distribution

$$\dot T\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto -T_f(\dot\varphi) \end{cases},$$

die n-te Ableitung entsprechend

$$T^{(n)}\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto (-1)^n T_f\left(\varphi^{(n)}\right) \end{cases}.$$

Zum Nachweis, daß $\dot T$ und allgemeiner auch $T^{(n)}$ Distributionen sind, müssen wir zeigen, daß dies lineare Abbildungen sind – angesichts der Linearität der Differentiation ist das klar. Zum Nachweis der Stetigkeit aber müssen wir wissen, daß für eine konvergente Folge von Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum auch die Folge der abgeleiteten Funktionen konvergiert; dies gilt nur deshalb, weil wir die Konvergenz im SCHWARTZ-Raum so definiert haben, daß auch alle Ableitungen und deren Produkte mit t-Potenzen konvergieren müssen.

Beispielsweise ist also für die DIRAC-Distribution

$$\Delta_a^{(n)}(\varphi) = (-1)^n \varphi^{(n)}(a)$$

oder, mit der δ-„Funktion“ ausgedrückt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-a)\,\varphi(t)\,dt = (-1)^n \varphi^{(n)}(a)\,.$$

Auch Sprungfunktionen wie

$$\vartheta\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \ge 0 \end{cases} \end{cases}$$

lassen sich in der schönen neuen Welt der Distributionen problemlos differenzieren:

$$T_\vartheta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t)\varphi(t)\,dt = \int_0^{\infty} \varphi(t)\,dt$$

hat als Ableitung die Distribution $\dot T_\vartheta$ mit

$$\dot T_\vartheta(\varphi) = -\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t)\dot\varphi(t)\,dt = -\int_0^{\infty} \dot\varphi(t)\,dt = -\varphi(t)\,\Big|_0^{\infty} = \varphi(0)\,,$$

da $\varphi(t)$ bei einer stark abfallenden Funktion für $t \to \infty$ gegen null geht. Diese Distribution kennen wir aber: Es ist gerade die DIRAC-Distribution Δ_0. Also ist

$$\dot T_\vartheta = \Delta_0\,,$$

was sich in Funktionen ausgedrückt (mit aller gebotenen Vorsicht) auch als

$$\dot\vartheta(t) = \delta(t)$$

schreiben läßt. Entsprechend lassen sich im Distributionensinne auch andere Sprungfunktionen differenzieren; die Ableitung an einer Sprungstelle $t = t_0$ ist jeweils Sprunghöhe mal $\delta(t - t_0)$.

Auch mit der Ableitung der Betragsfunktion haben wir auf Distributionenniveau keine Probleme: Für $f(t) = |t|$ zeigt partielle Integration, daß

$$\begin{aligned}\dot T_f(\varphi) &= -\int_{-\infty}^{\infty} |t|\cdot\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} t\cdot\varphi(t)\,dt - \int_{0}^{\infty} t\cdot\varphi(t)\,dt \\ &= t\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0}\varphi(t)\,dt - t\varphi(t)\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty}\varphi(t)\,dt \\ &= -\int_{-\infty}^{0}\varphi(t)\,dt + \int_{0}^{\infty}\varphi(t)\,dt = T_g(\varphi)\end{aligned}$$

mit

$$g(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}.$$

An der Stelle $t = 0$ können wir einen beliebigen Funktionswert wählen, denn T_g hängt nicht von diesem Wert ab. Wir bekommen also für $t \neq 0$, wo $f(t) = |t|$ differenzierbar ist, die erwarteten Ergebnisse, und für $t = 0$ keine Aussage. Nichtsdestoweniger ist die *Distribution* $\dot T_f$ wohldefiniert. Auf dem Niveau der Distributionen sind Ableitungen also auch für nur stückweise differenzierbare Funktionen problemlos.

Das Produkt einer Distribution mit einer beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion mit höchstens polynomialem Wachstum haben wir bereits definiert; das können wir insbesondere anwenden auf die Funktion

$$\Pi_r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto t^r .$$

Wir erwarten

Lemma: Für jede Distribution $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ und jede natürliche Zahl r ist

$$\widehat{T}^{(r)} = (-i)^r\,\widehat{\Pi_r T} \quad \text{und} \quad \Pi_r\widehat{T} = (-i)^r\,\widehat{T^{(r)}} .$$

Beweis: Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt nach den entsprechenden Formeln für stark abfallende Funktionen aus §6*b)*

$$\begin{aligned}\widehat{T}^{(r)}(\varphi) &= (-1)^r\widehat{T}(\varphi^{(r)}) = (-1)^r T\big(\widehat{\varphi^{(r)}}\big) = (-1)^r T\big(i^r\Pi_r\widehat{\varphi}\big) \\ &= (-i)^r T(\Pi_r\widehat{\varphi}) = (-i)^r\Pi_r T(\widehat{\varphi}) = (-1)^r\widehat{\Pi_r T}(\varphi) ,\end{aligned}$$

denn aus der Formel $\omega^r\widehat{\varphi}(\omega) = (-i)^r\widehat{\varphi^{(r)}}(\omega)$ folgt

$$\widehat{\varphi^{(r)}}(\omega) = i^r\omega^r\widehat{\varphi}(\omega) .$$

Entsprechend zeigt man auch die zweite Formel

$$\begin{aligned}\Pi_r\widehat{T}(\varphi) &= \widehat{T}(\Pi_r\varphi) = T\big(\widehat{\Pi_r\varphi}\big) = T\big(i^r\widehat{\varphi}^{(r)}\big) \\ &= i^r T\big(\widehat{\varphi}^{(r)}\big) = (-i)^r T^{(r)}(\widehat{\varphi}) = (-i)^r\widehat{T^{(r)}} .\end{aligned}$$

■

Rückübersetzt für Funktionen heißt das, daß die Formeln

$$\frac{d^r}{d\omega^r}\widehat{f}(\omega) = (-i)^r\,\widehat{t^r f}(\omega)$$

und

$$\omega^r\widehat{f}(\omega) = (-i)^r\,\widehat{f^{(r)}}(\omega) ;$$

zumindest bis auf Nullfunktionen auch dann für quadratintegrierbare Funktionen gelten, wenn diese nur im Distributionensinn differenzierbar sind. Die entsprechende Formel für die LAPLACE-Transformation, die zusätzlich die Funktions- und Ableitungswerte an der Stelle Null enthält, ist natürlich (auch modulo Nullfunktionen) nur dann sinnvoll, wenn diese Werte wohldefiniert sind.

g) Faltungen

Bei der Untersuchung von FOURIER-Reihen in §4*a)* erwies sich die (periodische) Faltung zweier Funktionen als wichtiges Instrument zum

Nachweis der Konvergenz; außerdem war sie oft nützlich, um ohne großen Aufwand neue FOURIER-Reihen aus bekannten herzuleiten.

Hier im nichtperiodischen Fall ist sie einfacher und anschaulicher zu verstehen als im periodischen Fall: $f(\star g)(t)$ ist einfach das gewichtete Mittel der Funktionswerte von f in der Umgebung von t, wobei g die Gewichtsfunktionen ist. Am einfachsten ist es, wenn man sich g als eine Funktion vorstellt, die im Punkt Null ein Maximum hat und dann nach beiden Seiten monoton abfällt; dann kann man sich $f \star g$ als eine „verschmierte“ (oder auch geglättete) Version von f vorstellen. Indem man für $g(t)$ GAUSSsche Glockenkurven nimmt, kann man beispielsweise unscharfe (oder weichgezeichnete) Photographien simulieren – je größer der Parameter σ, desto unschärfer ist das Resultat.

Für die formale Definition lassen wir allerdings beliebige Funktionen f und g zu; später werden wir sogar Faltungen von Funktionen mit Distributionen betrachten.

Definition: Für zwei Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt

$$f \star g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)\,ds \end{cases},$$

falls dieses Integral existiert, *Faltung* von f mit g.

Lemma: Für $f, g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ existiert die Faltung $f \star g$.

Beweis: Mit f liegt für jedes $t \in \mathbb{R}$ auch die Funktion $s \mapsto f(t-s)$ in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$; die Abschätzungen aus §8*a)* zeigen daher die Existenz des Integrals $f \star g(t)$. ■

Ebenfalls in völliger Analogie zum periodischen Fall gilt

Lemma: Falls die FOURIER-Transformationen von f, g und von $h(t) = (f \star g)(t)$ als Funktionen existieren, ist $\widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega)$.

Beweis: Nach dem Satz von FUBINI ist

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\,g(s)\,ds \right) e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\,g(s)e^{-i\omega t}\,dt \right) ds \\
&\underset{u=t-s}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\,g(s)e^{-i\omega(u+s)}\,du \right) ds \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}\,du \right) g(s)e^{-i\omega s}\,ds \\
&= \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}\,du \right) \cdot \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{-i\omega s}\,ds \right) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega)\,,
\end{aligned}$$

wie behauptet. ■

Als erste Anwendung hiervon können wir die FOURIER-Transformierte eines Produkts durch die FOURIER-Transformierten der Faktoren ausdrücken:

Korollar: $\widehat{fg}(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}(\widehat{f} \star \widehat{g})(\omega)\,.$

Beweis: Wir wenden das gerade bewiesenen Lemma an auf die FOURIER-Transformierten von f und g; dann ist

$$\widehat{\widehat{f} \star \widehat{g}}(t) = \widehat{\widehat{f}}(t) \cdot \widehat{\widehat{g}}(t)\,.$$

Wie wir wissen, unterscheiden sich FOURIER-Transformation und inverse FOURIER-Transformation durch den Faktor $1/2\pi$ vor der inversen Transformation und das Vorzeichen des Argument, d.h.

$$\widehat{\widehat{f}}(t) = 2\pi \cdot f(-t), \quad \widehat{\widehat{g}}(t) = 2\pi \cdot g(-t) \quad \text{und} \quad \widehat{\widehat{f} \star \widehat{g}}(t) = 4\pi^2 \cdot f(-t)g(-t)\,.$$

Aus dem gleichen Grund ist $\widehat{\widehat{\widehat{f} \star \widehat{g}}}(t) = 2\pi \cdot (\widehat{f} \star \widehat{g})(-t)$, also

$$2\pi \cdot (\widehat{f} \star \widehat{g})(-t) = 4\pi^2 \cdot \widehat{fg}(-t) \quad \text{oder} \quad \widehat{fg}(-t) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f} \star \widehat{g})(-t) .$$

Dies gilt für alle reellen Zahlen t, deshalb können wir das Minuszeichen links und rechts auch weglassen und haben dann die Behauptung des Korollars. ■

Wie im periodischen Fall folgt auch, daß die Faltung (abgesehen von eventuell vorhandenen Unstetigkeitsstellen) kommutativ und assoziativ ist:

$$f \star g = g \star f \quad \text{und} \quad f \star (g \star h) = (f \star g) \star h ,$$

denn für die FOURIER-Transformationen der beiden Seiten sind jeweils gleich nach dem Kommutativitätsgesetz und Assoziativitätsgesetz für die Multiplikation komplexer Zahlen.

Eine weitere interessante Konsequenz dieses Lemmas ist, daß sich Faltungen gelegentlich rückgängig machen lassen: $f \star g$ ist durch seine FOURIER-Transformation $\widehat{f} \cdot \widehat{g}$ (fast überall) bestimmt; falls $g(\omega)$ keine Nullstellen hat, kann man die Multiplikation mit $g(\omega)$ durch eine Division rückgängig machen. Eine Grundidee zum Rückgängigmachen der Faltung wäre also die folgende: Ist $h(t)$ die inverse FOURIER-Transformation von $1/\widehat{g}(\omega)$, so hat $(f \star g) \star h$ FOURIER-Transformierte

$$\widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega) \cdot \widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega) \cdot \frac{1}{\widehat{g}(\omega)} = \widehat{f}(\omega) ,$$

$(f \star g) \star h$ stimmt also fast überall mit f überein.

Leider ist die Sache aber doch nicht ganz so einfach, denn die Existenz von h ist alles andere als klar: Für eine stark abfallende Funktion $g(\omega)$ ist $1/g(\omega)$ „stark ansteigend", und natürlich gibt es auch Probleme mit den Nullstellen von g. Die Mathematik kennt jedoch eine ganze Reihe von Regularisierungstechniken, mit denen man solche Probleme umgehen kann. Insbesondere kann man für praktische Zwecke sowohl den Frequenzbereich, über den integriert wird, als auch den Zeit- oder Ortsbereich oft abschneiden, so daß nur ein Integral über ein endliches Intervall betrachtet werden muß.

Die Formel, die wir gerade benutzt haben, gelten, wenn man solche Techniken benutzt, natürlich nicht mehr exakt, aber doch oft mit einer Genauigkeit, die für praktische Zwecke völlig ausreicht. So konnte beispielsweise die NASA die Bilder des falsch fokusierten HUBBLE-Teleskops durch digitale Nachbehandlung so deutlich verbessern, daß die Bildqualität auch vor der Reperatur nicht viel schlechter war als bei einem korrekt fokusierten Teleskop.

Eine neuere Anwendung ist die sogenannte *brennpunktfreie Optik*, die von CMD Optics in Boulder, Colorado entwickelt wurde. Dort benutzt man eine (von Zeiss speziell zu diesem Zweck konstruierte) Linse ohne Brennpunkt; parallele einfallende Strahlen gehen also *nie* durch denselben Punkt der Bildebene, so daß grundsätzlich jedes Bild unscharf ist. Diese Unschärfe wird durch digitale Nachbearbeitung in der oben skizzierten Weise so gut es geht kompensiert.

Zweck dieser auf den ersten Blick unsinnigen Vorgehensweise ist die Erhöhung der Tiefenschärfe: Ein klassisches optisches System bildet, insbesondere wenn es mit wenig Licht auskommen muß und daher eine große Blende braucht, nur in einem sehr kleinen Entfernungsbereich scharf ab. Die brennpunktfreie Linse bildet natürlich überhaupt nirgends scharf ab, aber das Gesamtsystem aus Linse und digitaler Nachbearbeitung liefert scharfe Bilder aus einem deutlich größeren Entfernungsbereich als dies mit konventioneller Optik möglich ist.

Besonders einfach sind Faltungen mit δ-Funktionen zu berechnen: Für $\eta(t) = \delta(t - t_0)$ zeigt die Substitutionsregel mit $u = t - t_0 - s$, daß

$$\eta \star f = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0 - s)g(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)g(t - t_0 - u)\, du = g(t - t_0)$$

ist, Faltung mit $\delta(t - t_0)$ verschiebt also einfach das Argument um t_0. Insbesondere ist $\delta \star f = f$.

Im Falle einer Funktion, die außerhalb eines gewissen Intervalls null (oder praktisch null) ist, läßt sich durch Faltung mit einer Summe von δ-Funktionen der Graph an verschiedene Stellen verschieben; Abbildung 25 zeigt dies für die Faltung eines (fett eingezeichneten) Dreieck-