Als erstes Beispiel betrachten wir die extrem einfache Gleichung für eine Masse an einer Feder, die sich reibungsfrei in x-Richtung bewegen kann:

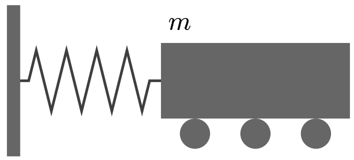


Abb. 17: Eine schwingende Masse

Nach dem HOOKEschen Gesetz wirkt auf diese Masse eine Rückstellkraft $\lambda x(t)$, die proportional ist zur Auslenkung $x(t)$ aus der Ruhelage; nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz ist diese Kraft (eine zeitlich konstante Masse m vorausgesetzt) gleich $m\ddot{x}(t)$. Insgesamt ist also

$$m\ddot{x}(t) + \lambda x(t) = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{x}(t) + \frac{\lambda}{m}x(t) = 0\,.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation macht daraus

$$s^2\mathcal{L}\{x(t)\}(s) - s \cdot x(0) - \dot{x}(0) + \frac{\lambda}{m}\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = 0$$

oder

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{s \cdot x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + \frac{\lambda}{m}}\,.$$

Die schwingende Masse m soll natürlich positiv sein, und auch λ ist größer als null, da $\lambda x(t)$ die *Rückstellkraft* ist. Also ist

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{x(0) \cdot s}{s^2 + \omega^2} + \frac{\dot{x}(0)}{s^2 + \omega^2} \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{m}}\,.$$

Hier erkennen wir die gerade berechneten LAPLACE-Transformiert en

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

und folgern, daß $x(t)$, falls LAPLACE-transformierbar, die Form

$$x(t) = x(0)\cos \omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega}\sin \omega t$$

haben muß mit $\omega = \sqrt{\lambda/m}$. Die Masse schwingt also ungedämpft mit Frequenz $\sqrt{\lambda/m}$.

d) Gedämpfte Schwingungen

Ungedämpfte Schwingungen wir im letzten Abschnitt wird man in der Realität eher selten beobachten: In den meisten Fällen führen Reibungseffekte schließlich zum Abklingen der Schwingung. Die Reibungskraft wird in den einfachsten Modellen als proportional zur Geschwindigkeit angesetzt, d.h. die linke Seite der Differentialgleichung wird durch ein konstantes Vielfaches von $\dot{x}(t)$ ergänzt. Dieselbe Art von Differentialgleichung erhalten wir auch, wenn wir eine Spule, einen Kondensator und einen Widerstand wie in Abbildung 18 hintereinanderschalten:

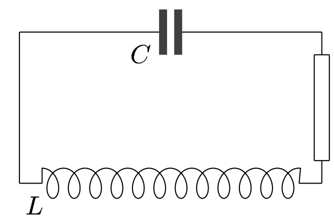


Abb. 18: Ein elektrischer Schwingkreis

Damit hier ein Strom fließt, nehmen wir an, daß der Kondensator zur Zeitpunkt $t = 0$ eine Ladung Q_0 enthalte; die Ladung zum Zeitpunkt t sei $Q(t)$. Dann beträgt der Spannungsabfall am Kondensator

$$U_1(t) = \frac{Q(t)}{C}\,,$$

der an der Spule ist nach der LENZschen Regel gleich

$$U_2(t) = L\dot{I}(t) = L\ddot{Q}(t)\,,$$

wobei $I(t) = \dot{Q}(t)$ die Stromstärke bezeichnet, und am Widerstand haben wir natürlich nach dem OHMschen Gesetz

$$U_3(t) = RI(t) = R\dot{Q}(t)\,.$$

Diese drei Spannungen müssen sich zu Null addieren, d.h.

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{Q}(t) + \frac{R}{L}\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{LC} = 0\,.$$

Um bei der Lösung dieser Gleichung keine komplizierten Konstanten mitschleppen zu müssen, schreiben wir die Gleichung bis auf weiteres in der Form

$$\ddot{Q}(t) + \rho\dot{Q}(t) + \sigma Q(t) = 0 \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{R}{L} \text{ und } \sigma = \frac{1}{LC}\,.$$

Außerdem schreiben wir $y(t)$ anstelle von $Q(t)$, um es einerseits mit gewohnten Variablen zu tun zu haben und andererseits, weil wir diesen Typ von Gleichungen noch auf viele andere Probleme anwenden können, bei denen die gesuchte Funktion nicht als Ladung interpretiert werden kann. Wir interessieren uns für das Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(0) = y_1\,.$$

Um zu sehen, wie sich die Lösungen solcher Gleichungen verhalten können, betrachten wir einige konkrete Beispiele. Beginnen wir mit dem Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 25y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 2\,.$$

Für die LAPLACE-Transformierte $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ gilt dann

$$s^2Y(s) - s - 2 + 8\big(sY(s) - 1\big) + 25Y(s) = (s^2+8s+25)Y(s) - s - 10 = 0\,,$$

also ist $Y(s) = \dfrac{s+10}{s^2+8s+25}$.

Wenn wir von der (bislang noch nicht bewiesenen) Annahme ausgehen, daß die gesuchte Funktion $y(t)$ durch ihre LAPLACE-Transformierte eindeutig bestimmt ist, müssen wir nun eine Funktion $y(t)$ finden, deren LAPLACE-Transformierte gleich $Y(s)$ ist. Unter den wenigen Beispielen, die wir bislang kennen, haben nur die Transformationen von Sinus und Kosinus quadratische Nenner, allerdings sind diese von der Art $s^2 + \omega^2$. Um einen linearen Term zu bekommen, müssen wir s durch $s + \lambda$ ersetzen; dies entspricht, wie wir gesehen haben, der Multiplikation mit einer Exponentialfunktion $e^{-\lambda t}$:

$$\mathcal{L}\{e^{-\lambda t}\cos\omega t\}(s) = \frac{s+\lambda}{(s+\lambda)^2+\omega^2} \quad \text{und}$$
$$\mathcal{L}\{e^{-\lambda t}\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{(s+\lambda)^2+\omega^2}\,.$$

Wir müssen daher versuchen, den Nenner auf die Form $(s+\lambda)^2+\omega^2$ zu bringen und den Zähler dann als Linearkombination von $s+\lambda$ und ω zu schreiben. Dies leistet einer der ältesten Tricks der Algebra, die schon seit über 2000 Jahre bekannte quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s+10}{s^2+8s+25} = \frac{s+10}{(s+4)^2+9} = \frac{s+4}{(s+4)^2+3^2} + 2\cdot\frac{3}{(s+4)^2+3^2} \\ &= \mathcal{L}\{e^{-4t}\cos 3t\}(s) + 2\mathcal{L}\{e^{-4t}\sin 3t\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{e^{-4t}(\cos 3t + 2\sin 3t)\}(s)\,. \end{aligned}$$

Wenn wir, wie auch bei allen folgenden Beispielen, davon ausgehen, daß eine Funktion durch ihre LAPLACE-Transformation zumindest für alle positiven Werte von t eindeutig bestimmt ist, kennen wir also die gesuchte Funktion

$$y(t) = e^{-4t}(\cos 3t + 2\sin 3t)\,.$$

Sie beschreibt eine gedämpfte Schwingung der Art, wie sie in Abbildung 19 zu sehen ist. (Die Funktion $y(t)$ geht bezogen auf ihre Periode zu schnell gegen Null um ein interessantes Bild zu geben.)

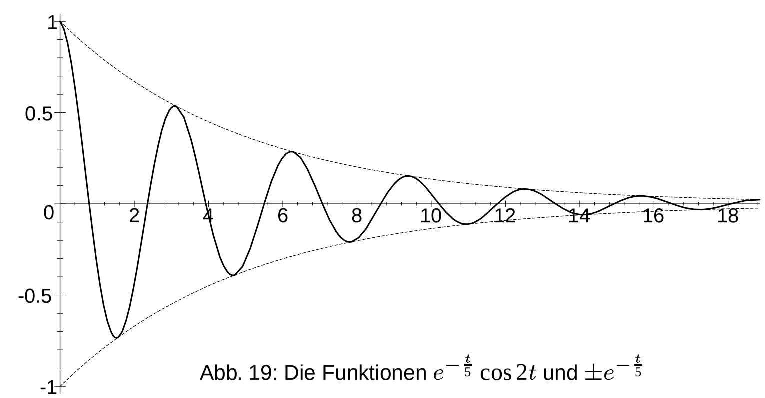


Abb. 19: Die Funktionen $e^{-\frac{t}{5}}\cos 2t$ und $\pm e^{-\frac{t}{5}}$

Als nächstes Beispiel betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 15y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 3\,.$$

LAPLACE-Transformation macht daraus

$$s^2Y(s) - s - 3 + 8\big(sY(s) - 1\big) + 15Y(s) = (s^2+8s+15)Y(s) - s - 11 = 0\,,$$

wobei wir wieder, wie auch in allen folgenden Beispielen, zur Abkürzung

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$$

setzen. Auflösen nach $Y(s)$ führt auf

$$Y(s) = \frac{s+11}{s^2+8s+15} = \frac{s+11}{(s+4)^2-1}\,.$$

Wegen des Minuszeichens im Nenner können wir dies nicht als LAPLACE-Transformation einer gedämpften Schwingung schreiben. Dafür sagt uns dieses Minuszeichen, daß der Nenner zwei *reelle* Nullstellen hat, nämlich -4 ± 1, also -3 und -5. Damit ist der Nenner auch gleich $(s+3)(s+5)$; via Partialbruchzerlegung können wir $Y(s)$ daher als Summe zweier rationaler Funktionen mit Nenner $s+3$ *bzw.* $s+5$ schreiben. Der Ansatz

$$\frac{a}{s+3} + \frac{b}{s+5} = \frac{(a+b)s + 5a + 3b}{(s+3)(s+5)} = \frac{s+11}{(s+3)(s+5)}$$

führt auf das lineare Gleichungssystem

$$a + b = 1 \quad \text{und} \quad 5a + 3b = 11\,.$$

Subtraktion von fünfmal der ersten Gleichung von der zweiten ergibt $-2b = 6$, also ist $b = -3$ und $a = 4$. Damit ist

$$Y(s) = \frac{4}{s+3} - \frac{3}{s+5}\,.$$

Aus dem vorigen Paragraphen wissen wir, daß $1/s$ die LAPLACE-Transformation der Konstanten Eins ist, also ist $1/(s+\lambda)$ die von $e^{-\lambda t}$. Somit ist $Y(s)$ die LAPLACE-Transformierte von $4e^{-3t} - 3e^{-5t}$, und dies ist auch die gesuchte Lösungsfunktion. In diesem Beispiel geht $y(t)$ also exponentiell gegen Null.

Als letztes Beispiel zu diesem Typ von Gleichungen wollen wir noch das Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 16 = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 2$$

betrachten. Hier ist

$$s^2Y(s) - s - 2 + 8\big(sY(s) - 1\big) + 16Y(s) = (s^2+8s+16)Y(s) - s - 10 = 0\,,$$

also

$$Y(s) = \frac{s+10}{s^2+8s+16} = \frac{s+10}{(s+4)^2} = \frac{s+4}{(s+4)^2} + \frac{6}{(s+4)^2} = \frac{1}{s+4} + \frac{6}{(s+4)^2}\,.$$

Da $1/s^2$ die LAPLACE-Transformierte von t ist, entspricht der zweite Summand der Funktion $6te^{-4t}$, d.h. $Y(s)$ ist die LAPLACE-Transformierte von

$$y(t) = e^{-4t} + 6te^{-4t} = (1+6t)e^{-4t}\,.$$

Hier haben wir also ein Produkt einer Exponentialfunktion mit einer linearen Funktion. Wie Abbildung 20 zeigt, dominiert in solchen Fällen für kleine t die lineare Funktion, aber langfristig sorgt natürlich der Dämpfungsfaktor $e^{-\lambda t}$ dafür, daß sich die Funktion asymptotisch der Null annähert.

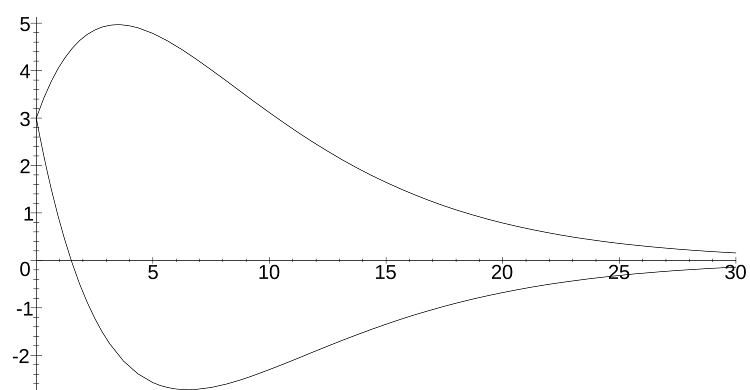


Abb. 20: Die Funktionen $(3 \pm 2t)e^{-\frac{t}{5}}$

Kehren wir zurück zum allgemeinen Fall, dem Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(0) = y_1 .$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation ergibt

$$s^2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - sy_0 - y_1 + \rho\big(s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - y_0\big) + \sigma\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = 0$$

und damit

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{s^2 + \rho s + \sigma} = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{\left(s + \frac{\rho}{2}\right)^2 + \sigma - \frac{\rho^2}{4}} .$$

Falls $\sigma > \rho^2/4$ können wir $\omega = \sqrt{\sigma - \frac{\rho^2}{4}}$ setzen und haben dann

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)^2 + \omega^2} = \frac{y_0(s+\rho/2)}{(s+\rho/2)^2 + \omega^2} + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{(s+\rho/2)^2 + \omega^2} .$$

In diesen beiden Summanden erkennen wir (bis auf konstante Faktoren) die LAPLACE-Transformierten von $e^{-\rho t/2}\cos\omega t$ und $e^{-\rho t/2}\sin\omega t$, d.h.

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 e^{-\rho t/2}\cos\omega t + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{\omega} e^{-\rho t/2}\sin\omega t \\ &= e^{-\rho t/2}\left(y_0\cos\omega t + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{\omega}\sin\omega t\right) . \end{aligned}$$

Der Kondensator entlädt sich also, wie es physikalisch zu erwarten war, aber der zeitliche Verlauf ist gegeben durch eine gedämpfte Schwingung. Die Dämpfung wird mit wachsendem $\rho = R/L$ immer stärker, d.h. je größer der Widerstand und je kleiner die Induktivität ist, desto schneller geht die Lösungsfunktion gegen Null.

Falls σ kleiner ist als $\rho^2/4$, können wir $\omega = \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \sigma}$ setzen und haben

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)^2 - \omega^2} = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2+\omega)(s+\rho/2-\omega)} .$$

Wie im obigen Beispiel ist hier eine Partialbruchzerlegung fällig; wegen

$$\frac{1}{(s+\rho/2)-\omega} - \frac{1}{(s+\rho/2)+\omega} = \frac{2\omega}{(s+\rho/2)^2 - \omega^2}$$

ergibt sich die LAPLACE-Transformierte zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)^2 - \omega^2} \\ &= \frac{1}{2\omega}\left(\frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2) - \omega} - \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2) + \omega}\right) \\ &= \frac{1}{2\omega}\left(\frac{y_0(s+\rho/2-\omega) + y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{s+\rho/2-\omega}\right. \\ &\qquad \left. - \frac{y_0(s+\rho/2+\omega) + y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{s+\rho/2+\omega}\right) \\ &= \frac{1}{2\omega}\left(y_0 + \frac{y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{s+\rho/2-\omega} - y_0 - \frac{y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{s+\rho/2+\omega}\right) \\ &= \frac{y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{2\omega}\cdot\frac{1}{s+\rho/2-\omega} \\ &\qquad - \frac{y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{2\omega}\cdot\frac{1}{s+\rho/2+\omega} . \end{aligned}$$

Diese Summanden können wir nun als LAPLACE-Transformierte identifizieren und erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \frac{y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{2\omega}\cdot\mathcal{L}\{e^{-(\rho/2-\omega)t}\}(s) \\ &\qquad - \frac{y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{2\omega}\cdot\mathcal{L}\{e^{-(\rho/2+\omega)t}\}(s) . \end{aligned}$$

Die Lösung ist also

$$y(t) = \frac{y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{2\omega}\cdot e^{-(\rho/2-\omega)t} - \frac{y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{2\omega}\cdot e^{-(\rho/2+\omega)t} .$$

Wegen der Positivität von σ ist

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \sigma} < \sqrt{\frac{\rho^2}{4}} = \frac{\rho}{2} ;$$

daher sind dies zwei Exponentialfunktionen, die für $t \to \infty$ gegen null gehen. Damit entlädt sich der Kondensator in diesem Fall ohne Schwingungen gemäß einer Summe zweier abfallender Exponentialfunktionen.

Die Bedingung $\sigma < \frac{\rho^2}{4}$ übersetzt sich in

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{L^2} \quad \text{oder} \quad R > \sqrt{\frac{L}{C}}\,;$$

wenn der Widerstand zu groß ist, dämpft er also so stark, daß es keine Schwingungskomponente mehr gibt.

Bleibt noch der Fall $\sigma = \rho^2/4$. Hier ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)^2} = \frac{y_0(s+\rho/2)}{(s+\rho/2)^2} + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{(s+\rho/2)^2}\\ &= \frac{y_0}{s+\rho/2} + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{(s+\rho/2)^2}\,.\end{aligned}$$

Da $1/s$ die LAPLACE-Transformierte der Eins ist und $1/s^2$ die der Identität, folgt

$$y(t) = \left(y_0 + \left(y_1 + y_0\frac{\rho}{2}\right)t\right)\,e^{-\frac{\rho}{2}t}$$

Produkt einer linearen Funktion und einer abfallenden Eyponentialfunktion.

e) Erzwungene Schwingungen

Im Stromkreis aus dem letzten Abschnitt floß nur deshalb ein Strom, weil der Kondensator aus irgendeinem Grund bereits aufgeladen war; üblicher wäre, daß ein Strom fließt, weil der Stromkreis eine Stromquelle enthält. Wir ergänzen deshalb den Stromkreis aus Abbildung 18 durch eine Wechselstromquelle mit Kreisfrequenz ω_0. Die Differentialgleichung wird damit zu

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t\,,$$

in abstrakt-mathematischer Schreibweise geht es also um Differentialgleichungen der Form

$$\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t\,.$$

Betrachten wir auch hierzu wieder zunächst einige Beispiele, etwa das Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 25y(t) = 40\cos t + 40\sin t \quad \text{mit} \quad y(0) = 2,\ \dot{y}(0) = 4\,.$$

Die LAPLACE-Transformation macht daraus

$$\begin{aligned}&s^2Y(s) - 2s - 4 + 8\big(sY(s) - 2\big) + 25Y(s)\\ &= (s^2 + 8s + 25)Y(s) - 2s - 20 = \frac{40s+40}{s^2+1}\,,\end{aligned}$$

und wir erhalten

$$Y(s) = \frac{2s+20}{s^2+8s+25} + \frac{40s+40}{(s^2+1)(s^2+8s+25)}\,.$$

Den ersten Summanden kennen wir im wesentlichen bereits aus dem letzten Abschnitt; beim zweiten hilft offensichtlich nur eine Partialbruchzerlegung: Wir setzen an

$$\begin{aligned}\frac{40s+40}{(s^2+1)(s^2+8s+25)} &= \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{cs+d}{s^2+8s+25}\\ &= \frac{(as+b)(s^2+8s+25) + (cs+d)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+8s+25)}\\ &= \frac{(a+c)s^3 + (8a+b+d)s^2 + (25a+8b+c)s + 25b + d}{(s^2+1)(s^2+8s+25)}\,,\end{aligned}$$

d.h. $a+c = 0$. $\quad 8a+b+d = 0, \quad 25a+8b+c = 40 \quad$ und $\quad 25b+d = 40$.

Damit ist $c = -a$ und $d = 40 - 25b$; setzen wir das ein in die beiden mittleren Gleichungen, folgt

$$8a + b + 40 - 25b = 8a - 24b + 40 = 0 \quad \text{und} \quad 24a + 8b = 40\,.$$

Subtrahiert man dreimal die erste Gleichung von der zweiten, folgt, daß $80b = 160$ ist, also $b = 2$ und $a = 1$. Damit kennen wir auch $c = -1$ und $d = -10$ und

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{2s+20}{s^2+8s+25} + \frac{s+2}{s^2+1} - \frac{s+10}{s^2+8s+25}\\ &= \frac{s+2}{s^2+1} + \frac{s+10}{s^2+8s+25}\\ &= \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1} + \frac{s+4}{(s+4)^2+3^2} + 2\cdot\frac{3}{(s+4)^2+3^2}\\ &= \mathcal{L}\{\cos t + 2\sin t + e^{-4t}\big(\cos 3t + 2\sin 3t\big)\}(s)\,.\end{aligned}$$

Wir erhalten somit die Lösungsfunktion

$$y(t) = \cos t + 2\sin t + e^{-4t}\big(\cos 3t + 2\sin 3t\big)\,.$$

Sie ist Summe aus einer gedämpften Schwingung, wie wir sie ohne die rechte Seite hätten, und einer reinen Schwingung der anregenden Frequenz, die sich langfristig durchsetzt. Im Vergleich zur rechten Seite hat sie jedoch sowohl eine andere Amplitude als auch eine andere Phase. Abbildung 21 zeigt, wieder mit besser zum Zeichnen geeigneten Parametern, eine solche Summe.

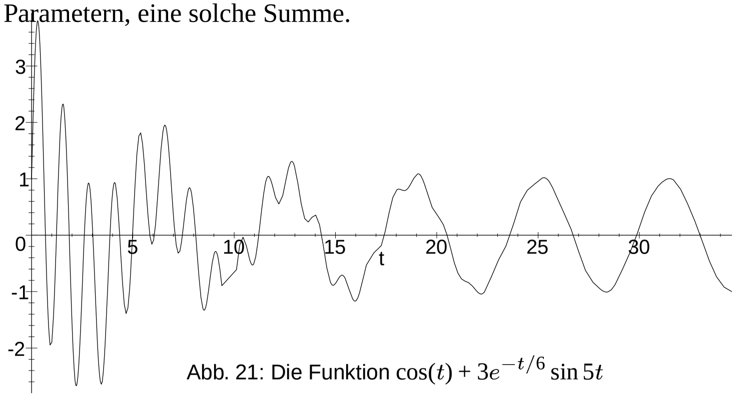


Abb. 21: Die Funktion $\cos(t) + 3e^{-t/6}\sin 5t$

Als zweites Beispiel betrachten wir

$$\ddot y(t) + 8\dot y(t) + 15y(t) = 30\cos t + 20\sin t \quad \text{mit} \quad y(0) = 2,\ \dot y(0) = 1\,.$$

Hier führt die LAPLACE-Transformation auf

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - 2s - 1 + 8\big(sY(s) - 2\big) + 15Y(s) \\ = (s^2 + 8s + 15)Y(s) - 2s - 17 = \frac{30s + 20}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

oder

$$Y(s) = \frac{2s + 17}{s^2 + 8s + 15} + \frac{30s + 20}{(s^2 + 1)(s^2 + 8s + 15)}\,.$$

Wieder ist für den zweiten Summanden eine Partialbruchzerlegung notwendig.

$$\frac{30s + 20}{(s^2 + 1)(s^2 + 8s + 15)} = \frac{as + b}{s^2 + 1} + \frac{cs + d}{(s^2 + 8s + 15}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(as + b)(s^2 + 8s + 15) + (cs + d)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 8s + 15)} \\ &= (a + c)s^3 + (8a + b + d)s^2 + (15a + 8b + c)s + 15b + d\,. \end{aligned}$$

Wir müssen also das lineare Gleichungssystem

$$a + c = 0, \quad 8a + b + d = 0, \quad 15a + 8b + c = 30 \quad \text{und} \quad 15b + d = 20$$

lösen. Die erste und die letzte Gleichung erlauben auch hier wieder, $c = -a$ und $d = 20 - 15b$ durch a und b auszudrücken; Einsetzen in die beiden mittleren Gleichungen führt auf

$$8a - 14b = -20 \quad \text{und} \quad 14a + 8b = 30\,,$$

was sich zu

$$4a - 7b = -10 \quad \text{und} \quad 7a + 4b = 15$$

kürzen läßt. Vier mal erste plus sieben mal zweite Gleichung ergibt $65a = 65$ oder $a = 1$, also ist $b = 2, c = -1$ und $d = -10$. Somit ist

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2s + 17}{s^2 + 8s + 15} + \frac{s + 2}{s^2 + 1} - \frac{s + 10}{s^2 + 8s + 15} \\ &= \frac{s + 2}{s^2 + 1} + \frac{s + 7}{(s + 4)^2 - 1}\,. \end{aligned}$$

Auch hier ist für den zweiten Summanden eigentlich wieder eine Partialbruchzerlegung notwendig, allerdings läßt sie sich in diesem Falle auch umgehen: Wegen der Linearität der LAPLACE-Transformation ist nämlich

$$\mathcal{L}\{\cosh \lambda t\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - \lambda} + \frac{1}{s + \lambda}\right) = \frac{s}{s^2 - \lambda^2}$$

und

$$\mathcal{L}\{\sinh \lambda t\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - \lambda} - \frac{1}{s + \lambda}\right) = \frac{\lambda}{s^2 - \lambda^2}\,.$$

Kombinieren wir dies mit der Regel, daß Multiplikation mit einer Exponentialfunktion das Argument verschiebt, erhalten wir über die Zerlegung

$$Y(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 1} + \frac{s + 4}{(s + 4)^2 - 1} + \frac{3}{(s + 4)^2 - 1}$$

als Funktion mit Laplace-Transformation $Y(s)$

$$\begin{aligned} y(t) &= \cos t + 2\sin t + e^{-4t}(\cosh t + 3\sinh t) \\ &= \cos t + 2\sin t + \frac{e^{-3t} + e^{-5t} + 3e^{-3t} - 3e^{-5t}}{2} \\ &= \cos t + 2\sin t + 2e^{-3t} - e^{-5t} . \end{aligned}$$

Auch hier setzt sich also die anregende Schwingung durch.

Als letztes Beispiel betrachten wir

$$\ddot{y}(t) + 25y(t) = \cos 5t \quad \text{mit} \quad y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 0 .$$

LAPLACE-Transformation führt auf

$$s^2Y(s) - s + 25Y(s) = \frac{s}{s^2+25} \quad \text{oder} \quad Y(s) = \frac{s}{s^2+25} + \frac{s}{(s^2+25)^2} .$$

Der erste Summand ist einfach die LAPLACE-Transformierte von $\cos 5t$; der zweite ist uns bislang noch nicht begegnet.

Wenn wir daran denken, daß die Quotienregel der Differentiation das Quadrat des Nenners der abgeleiteten Funktion im Nenner hat, liegt es nahe, mit der Ableitung der LAPLACE-Transformierten des Sinus zu vergleichen:

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{d}{ds}\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{-2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2} = -2\omega \cdot \frac{s}{(s^2+\omega^2)^2} .$$

Wie wir aus Abschnitt *b)* wissen, ist die Ableitung der LAPLACE-Transformierten einer Funktion gleich der LAPLACE-Transformierten der $-t$-fachen Funktion. In unserem Fall folgt

$$\mathcal{L}\{t\sin\omega t\}(s) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

und speziell

$$\mathcal{L}\{t\sin 5t\}(s) = \frac{10s}{(s^2+25)^2} .$$

Somit ist hier die Lösung gleich

$$y(t) = \cos 5t + \frac{t}{10}\sin 5t .$$

Der zweite Term ist eine Schwingung mit linear ansteigender Amplitude; wie die obige Rechnung zeigt, kommt er daher, daß die Eigenfrequenz der linken Seite gleich der anregenden Frequenz auf der rechten Seite ist. Da unbegrenzt wachsende Amplituden nichts gutes bedeuten, redet man hier von der sogenannten *Resonanzkatastrophe.* Abbildung 22 zeigt ein Beispiel.

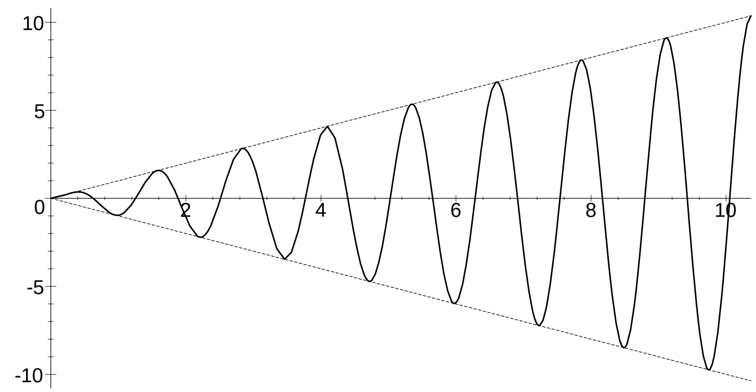


Abb. 22: Die Funktion $t\sin 5t$

Nach diesen Beispielen wollen wir auch das Anfangswertproblem dieses Abschnitts systematisch betrachten, allerdings sei die rechte Seite der Einfachheit halber als eine reine Kosinusfunktion der Form $A_0\cos\omega_0 t$ angenommen. Wir betrachten somit das Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t) = c\cos\omega_0 t \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0,\ \dot{y}(0) = y_1 .$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation führt auf

$$(s^2 + \rho s + \sigma)\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - sy_0 - y_1 - \rho y_0 = \frac{cs}{s^2+\omega_0^2}$$

und damit

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{s^2+\rho s+\sigma} + \frac{cs}{(s^2+\omega_0^2)(s^2+\rho s+\sigma)} .$$

Die Umkehrung der LAPLACE-Transformation des ersten Summanden kennen wir: Das ist die Lösung des im vorigen Abschnitt betrachteten

Anfangswertproblems. Für den zweiten Summanden brauchen wir, wie im obigen Beispiel, eine Partialbruchzerlegung: Falls die beiden Faktoren des Nenners verschieden sind, können wir mit geeigneten Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ schreiben

$$\frac{cs}{(s^2+\omega_0^2)(s^2+\rho s+\sigma)} = \frac{\alpha s+\beta}{s^2+\omega_0^2} + \frac{\gamma s+\delta}{s^2+\rho s+\sigma}\,.$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner führt auf die Polynomgleichung

$$\begin{aligned} cs &= (\alpha s+\beta)(s^2+\rho s+\sigma) + (\gamma s+\delta)(s^2+\omega_0^2) \\ &= (\alpha+\gamma)s^3 + (\beta+\alpha\rho+\delta)s^2 + (\beta\rho+\alpha\sigma+\gamma\omega_0^2)s + \beta\sigma+\delta\omega_0^2\,, \end{aligned}$$

also auf das lineare Gleichungssystem

$$\alpha+\gamma=0, \quad \alpha+\rho\beta+\delta=0, \quad \sigma\alpha+\rho\beta+\omega_0^2\gamma=c \quad \text{und} \quad \sigma\beta+\omega_0^2\delta=0\,.$$

Aus der ersten und der letzten Gleichung erhalten wir die Beziehungen

$$\gamma=-\alpha \quad \text{und} \quad \delta=-\frac{\sigma}{\omega_0^2}\beta\,;$$

damit bleiben nur noch zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten α und β übrig:

$$\rho\alpha + \left(1-\frac{\sigma}{\omega_0^2}\right)\beta = 0 \quad \text{und} \quad (\sigma-\omega_0^2)\alpha+\rho\beta = c\,.$$

Falls ρ nicht verschwindet, führt die erste Gleichung zu

$$\alpha = \frac{\frac{\sigma}{\omega_0^2}-1}{\rho}\cdot\beta = \frac{\sigma-\omega_0^2}{\rho\omega_0^2}\cdot\beta\,,$$

und damit ist nach der zweiten Gleichung

$$\left(\frac{(\sigma-\omega_0^2)^2}{\rho\omega_0^2}+\rho\right)\beta = c$$

oder

$$\beta = \frac{c}{\frac{(\sigma-\omega_0^2)^2}{\rho\omega_0^2}+\rho} = \frac{c\rho\omega_0^2}{(\sigma-\omega_0^2)^2+\rho^2\omega_0^2}\,.$$

Damit sind auch α, γ und δ bekannt:

$$\alpha = -\gamma = \frac{\sigma-\omega_0^2}{\rho\omega_0^2}\cdot\beta = \frac{c(\sigma-\omega_0^2)}{(\sigma-\omega_0^2)^2+\rho^2\omega_0^2}$$

und

$$\delta = -\frac{\sigma}{\omega_0^2}\beta = \frac{-c\rho\sigma}{(\sigma-\omega_0^2)^2+\rho^2\omega_0^2}\,.$$

Bleibt noch der Fall $\rho = 0$ zu behandeln. Dann bleibt vom Gleichungssystem für α und β nur noch

$$\left(1-\frac{\sigma}{\omega_0^2}\right)\beta = 0 \quad \text{und} \quad (\sigma-\omega_0^2)\alpha = c$$

übrig. Ist $\sigma \neq \omega_0^2$, folgt, daß

$$\beta=\delta=0 \quad \text{und} \quad \alpha=-\gamma=\frac{c}{\sigma-\omega_0^2}$$

sein muß, was offensichtlich genau die obigen Formeln im Spezialfall $\rho = 0$ sind.

Für $\sigma = \omega_0^2$ wird die zweite Gleichung zu $0\cdot\alpha = c \neq 0$ und damit unlösbar; das ist nicht weiter verwunderlich, denn das entspricht dem Fall, daß im obigen Ansatz zur Partialbruchzerlegung die beiden Nenner gleich sind, was natürlich nicht funktionieren kann.

In allen anderen Fällen kennen wir nun reelle Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so daß

$$\frac{cs}{(s^2+\omega_0^2)(s^2+\rho s+\sigma)} = \frac{\alpha s+\beta}{s^2+\omega_0^2} + \frac{\gamma s+\delta}{s^2+\rho s+\sigma}$$

ist. Vom ersten Summanden wissen wir, daß

$$\mathcal{L}\left\{\alpha\cos\omega_0 t + \frac{\beta}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right\} = \frac{\alpha s+\beta}{s^2+\omega_0^2}$$

ist; den zweiten Summanden müssen wir wie oben durch quadratische Ergänzung

$$s^2+\rho s+\sigma = \left(s-\frac{\rho}{2}\right)^2 + \sigma - \frac{\rho^2}{4}$$

umformen, und genau wie dort hängt es vom Vorzeichen von $\sigma - \frac{\rho^2}{4}$ ab, ob wir gedämpfte Schwingungen mit Frequenz $\omega = \sqrt{\sigma-\frac{\rho^2}{4}}$ oder abfallende Eyponentialfunktionen erhalten. In jedem Fall ist die Lösung Linearkombination einer reinen Schwingung mit der erregenden Frequenz ω_0, im elektrischen Schwingkreis also der Frequenz der Wechselstromquelle, und einer Funktion, die für $t \to \infty$ gegen null geht. Langfristig setzt sich, wie in Abbildung 21 zeigt die erregende Frequenz durch.

Bleibt noch der zurückgestellte Fall, daß beide Nenner gleich sind, d.h. $\rho = 0$ und $\sigma = \omega_0^2$ ist. Dann müssen wir, wie im letzten der konkreten Beispiele dieses Abschnitts, eine Funktion finden, deren LAPLACE-Transformierte gleich

$$\frac{cs}{(s^2+\omega_0^2)^2}$$

ist. Dort haben wir gesehen, daß

$$\mathcal{L}\{t\sin\omega t\}(s) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

ist, also folgt

$$\frac{cs}{(s^2+\omega_0^2)^2} = \mathcal{L}\left\{\frac{c}{2\omega_0}\cdot t\sin\omega_0 t\right\}(s)\,,$$

und wir haben auch diesen Fall gelöst: Er führt auf die bereits im letzten der konkreten Beispiele aufgetretene *Resonanzkatastrophe:* Die erregende Schwingung hat dieselbe Frequenz wie der Schwingkreis, und das führt, bei Abwesenheit einer jeglichen Dämpfung, zu einer katastrophalen Aufschaukelung. Auch bei Dämpfung ist Resonanz zu beobachten: Die oben berechneten Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, haben allesamt den Nenner

$$(\sigma-\omega_0^2)^2+\rho^2\omega_0^2\,,$$

werden also umso größer, je näher σ bei ω_0^2 liegt, jedoch verhindert der Dämpfungsterm ρ, daß der Nenner je wirklich verschwindet. Bei kleinem ρ kann die Resonanz bei und um $\sigma = \omega_0^2$ allerdings in der Praxis trotzdem problematisch und in Extremfällen (z.B. bei Brücken) sogar katastrophal sein.

Mit den Formeln, die schon haben, könnten wir nun leicht die vollständigen Lösungen für jeden der behandelten Fälle hinschreiben, aber die

bisherige Diskussion zeigt, daß das doch zu sehr langen Formeln führen würde.Die LAPLACE-Transformation ist zwar sehr gut geeignet, um die Lösung eines *konkreten* Anfangswertproblems hinzuschreiben – dann sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ keine komplizierten Ausdrücke, sondern einfach reelle Zahlen –, aber für abstraktere Überlegungen führt sie zu eher unübersichtlichen Ergebnissen. Wir werden daher im nächsten Kapitel alternative Methoden kennenlernen, die mehr über die Struktur der Lösungen von Differentialgleichungen aussagen.

§ 7: Die Fourier-Transformation auf dem Schwartz-Raum

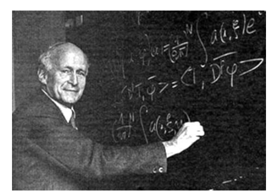
a) Der Schwartz-Raum der stark abfallenden Funktionen

Wie die Beispiele aus §5 zeigen, ist die Existenz von FOURIER- und LAPLACE-Integralen alles andere als sicher. In diesem Abschnitt wollen wir eine Klasse von Funktionen betrachten, für die es garantiert keine Probleme gibt, und wir wollen für diese Funktionen weitere Eigenschaften von FOURIER- und LAPLACE-Transformation herleiten. Im nächsten Paragraphen werden wir diese Ergebnisse verallgemeinern auf die Funktionen, die uns wirklich interessieren.

Definition: Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *stark abfallend*, wenn sie beliebig oft stetig differenzierbar ist und die Funktionen

$$t \mapsto \left|t^r f^{(k)}(t)\right|$$

für alle $k, r \ge 0$ beschränkt sind. Die Menge aller stark abfallender Funktionen bezeichnen wir als SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.



LAURENT SCHWARTZ (1915–2002) wurde in Paris geboren, studierte zunächst an der dortigen Ecole Normale Supérieure, dann an der Universität Straßburg. 1945 wurde er Professor in Nancy und entwickelte dort die mathematische Theorie der bislang nur von Physikern wie DIRAC und HEAVISIDE betrachteten Distributionen. Für diese Arbeiten wurde er 1950 mit der Fields Medal ausgezeichnet, dem bedeutendsten Preis in der Mathematik. Von 1953 bis zu seiner Emeritierung 1983 lehrte er in Paris, bis 1980 an der Ecole Polytechnique, dann an der Universität Paris VII.

Es ist klar, daß auch Summen und skalare Vielfache von stark abfallenden Funktionen stark abfallend sind; der SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist daher ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Beispiele: *a)* Die Funktion $f(t) = e^{-t^2}$ liegt in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$: Sie ist beliebig oft stetig differenzierbar; ihre Ableitungen haben jeweils die Form $P(t)e^{-t^2}$ mit einem geeigneten Polynom P. Da die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom, geht e^{-t^2} schneller gegen Null als ein Polynom gegen unendlich gehen kann, das Produkt geht also für $t \to \pm\infty$ gegen Null und ist daher auf ganz $\mathbb{R}$ beschränkt.

b) Sei

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Da diese Funktion außerhalb des Intervalls (a, b) verschwindet und im Innern stetig ist, ist sie natürlich beschränkt. Ihre Ableitungen sind Produkte aus rationalen Funktionen mit f selbst; da $f(t)$ für $t \to a$ oder $t \to b$ erheblich schneller gegen null geht als eine rationale Funktion gegen unendlich gehen kann, haben alle Ableitungen an den Intervallgrenzen den Wert null; die Funktion ist also beliebig oft stetig differenzierbar. Die Beschränktheitsbedingungen sind problemlos: Im kompakten Intervall $[a, b]$ ist jede stetige Funktion beschränkt, und außerhalb sind alle hier betrachteten Funktionen null.

Ein erster Hinweis darauf, daß wir in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ nur selten Probleme mit der Existenz von Integralen haben dürften, gibt das folgende

Lemma: *a)* Für eine Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ existieren

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t)}\,dt .$$

b) Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $\omega \in \mathbb{R}$ existiert das FOURIER-Integral

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt ;$$

für $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $t \in \mathbb{R}$ existiert das inverse FOURIER-Integral

$$\check{g}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega .$$

c) Die Abbildung

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \qquad (f, g) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt \end{cases}$$

macht $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ zu einem HERMITEschen Vektorraum.

Beweis: a) Da sowohl $f(t)$ als auch $t^2 f(t)$ beschränkt sind, ist auch $(1 + t^2)f(t)$ beschränkt, es gibt also eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so daß

$$|f(t)| \le \frac{C}{1+t^2} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} .$$

Da das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{a,b\to\infty} \int_{-a}^{b} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{a,b\to\infty} \bigl(\arctan b - \arctan(-a)\bigr)$$
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

konvergiert, ist es eine konvergente Majorante des Integrals über f, so daß nach dem Majorantenkriterium auch das letztere konvergiert. Damit ist auch *b)* bewiesen, d.h. die Konvergenz aller Integrale $\widehat{f}(\omega)$ und $\check{g}(t)$, denn da $e^{\pm i\omega t}$ den Betrag eins hat, ist auch für jedes $\omega \in \mathbb{R}$ *bzw.* $t \in \mathbb{R}$

$$|f(t)| = \left|f(t) \cdot e^{-i\omega t}\right| \le \frac{C}{1+t^2}$$

bzw.

$$|g(\omega)| = \left|g(\omega) \cdot e^{i\omega t}\right| \le \frac{C}{1+\omega^2} .$$

Genauso läßt sich auch das Integral über $f(t)\overline{f(t)}$ abschätzen, denn da $|tf(t)|$ beschränkt ist, ist auch $\left|t^2 f(t)\overline{f(t)}\right|$ und damit $(1 + t^2)f(t)\overline{f(t)}$ beschränkt. (Betragsstriche sind hier natürlich überflüssig.)

b) Wie wir gerade gesehen haben, konvergiert das rechtsstehende Integral im Spezialfall $f = g$. Für beliebiges $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und beliebige reelle Zahlen $a \le b$ gilt nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung in der etwas allgemeineren Form aus **[HM1]**, *Kap. 1*, §6*c)*

$$\left| \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt \right| \le \sqrt{\left| \int_a^b f(t)\overline{f(t)}\,dt \right|} \cdot \sqrt{\left| \int_a^b g(t)\overline{g(t)}\,dt \right|},$$

und somit konvergiert mit der rechten Seite auch die linke für $a \to -\infty$ und $b \to \infty$.

Die Eigenschaften eines HERMITEschen Skalarprodukts sind klar bis auf die Eigenschaft, daß nur die Nullfunktion Skalarprodukt null mit sich selbst haben darf, aber da wir es hier mit beliebig oft stetig differenzierbaren und damit insbesondere stetigen Funktionen zu tun haben, folgt dies genauso wie in **[HM1]**, *Kap. 1*, §6*a)* für das Skalarprodukt auf dem Vektorraum aller stetiger Funktionen $[0, 1] \to \mathbb{R}$. ■

Da mit einer Funktion f auch alle deren Ableitungen sowie ihre Produkte mit Polynomen stark abfallend sind, gelten im übrigen auch die Formeln aus dem letzten Paragraphen über FOURIER-Transformationen und Ableitungen, ohne daß wir uns über die dort notwendigen, für Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum aber automatisch erfüllten Zusatzvoraussetzungen Gedanken machen müßten.

b) Die Fourier-Transformierte der Gauß-Funktion

Ein wesentliches Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis, daß zumindest auf dem SCHWARTZ-Raum die inverse FOURIER-Transformation wirklich invers zur FOURIER-Transformation ist. Die Strategie ist folgende: Wir zeigen zunächst, daß dies für *eine* spezielle Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt, und folgern daraus in einem zweiten Schritt, daß dies für *alle* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ der Fall ist.

Für die eine spezielle Funktion aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ haben wir nicht viel Auswahl: Wir kennen bislang im wesentlichen nur zwei Beispiele, nämlich $f(t) = e^{-t^2}$ und $f(t) = e^{-1/(t-a)(b-t)}$ auf (a, b) und null sonst. Da das

erste Beispiel etwas harmloser aussieht, nehmen wir dieses, und da es den Aufwand kaum vergrößert, später aber nützlich sein wird, verallgemeinern wir es leicht zu

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} \quad \text{mit} \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Diese Funktion heißt GAUSS-Funktion mit Varianz σ^2; ihr Graph wird auch als *Glockenkurve* bezeichnet. Abbildung 23 zeigt die Kurven für $\sigma = 1/2$ (gepunktet), $\sigma = 1$ (ausgezogen) und $\sigma = 2$ (gestrichelt); wie man sieht, wird die Kurve flacher für größere σ, wohingegen kleine σ zu einem schärfer ausgeprägten Maximum führen. Im Zusammenhang mit der Fehlerrechnung und Statistik werden uns am Ende des Semesters noch genauer mit dieser Funktion beschäftigen.

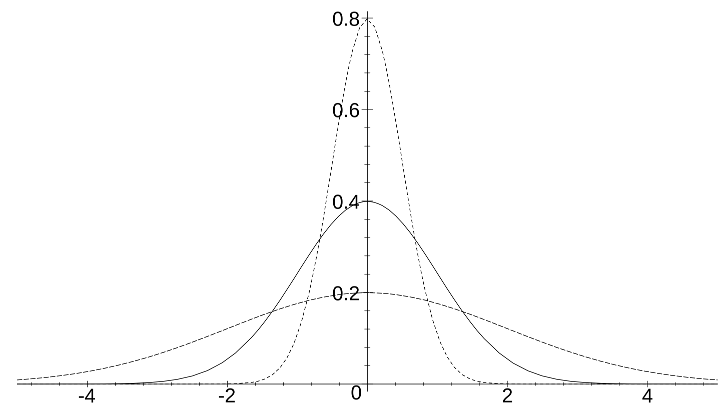


Abb. 23: Gaußkurven für $\sigma = \frac{1}{2}$, 1 und 2

Nach Definition ist

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega t}\,dt,$$

aber da schon die Stammfunktion von e^{-t^2} nicht elementar ausdrückbar ist, haben wir sicherlich wenig Chancen, dieses Integral über eine Stammfunktion zu berechnen.

Das Lemma aus dem vorigen Abschnitt erlaubt uns aber, Aussagen über die Ableitung von $\widehat{f}(\omega)$ machen:

$$\frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega) = (-i)\cdot \widehat{tf}(\omega) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}e^{-i\omega t}\,dt\,.$$

Der neue Integrand ist ziemlich ähnlich zur Ableitung des alten, denn

$$\frac{d}{dt}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t} = -\left(\frac{t}{\sigma^2}+i\omega\right)e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left(-\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\right) = (t+i\omega\sigma^2)\,e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,.$$

Die Funktion, die hier abgeleitet wird, geht für $t\to\pm\infty$ gegen null, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty}(t+i\omega\sigma^2)\,e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,dt = -\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0\,,$$

und damit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,dt = -i\omega\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,dt\,.$$

Die Ableitung von $\widehat{f}(\omega)$ ist daher

$$\frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}\sigma}(-i\omega\sigma^2)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,dt = -\omega\sigma^2\cdot\widehat{f}(\omega)\,.$$

Somit ist $\widehat{f}(\omega)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dg}{d\omega}(\omega) = -\omega\sigma^2\cdot g(\omega)\,.$$

Diese Differentialgleichung hat offensichtlich die Nullfunktion als eine ihrer Lösungen; falls sie auch eine Lösung $g(\omega)$ hat, die nicht für alle

Werte von ω verschwindet, können wir zumindest in der Umgebung solcher Werte durch $g(\omega)$ dividieren und erhalten

$$\frac{g'(\omega)}{g(\omega)} = -\omega\sigma^2\,.$$

Da die Ableitung der Logarithmusfunktion die Funktion $1/x$ ist, zeigt die Kettenregel, daß die linke Seite dieser Gleichung die Ableitung von $\ln g(\omega)$ ist. Durch Integration beider Seiten folgt

$$\ln g(\omega) = -\frac{\omega^2\sigma^2}{2}+C \Longrightarrow g(\omega) = e^C e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\,.$$

Somit ist $\widehat{f}(\omega)$ ein konstantes Vielfaches von $e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$, d.h.

$$\widehat{f}(\omega) = \widehat{f}(0)\cdot e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\,.$$

Damit ist uns die FOURIER-Transformierte von f bekannt bis auf die Konstante

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt\,.$$

In **[HM1]**, Kap. 2, §6*c)* hatten wir auf dem Umweg über ein zweidimensionales Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

berechnet; über die Substitution $u = t/\sqrt{2}\sigma$ folgt daraus sofort

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt = 1\,.$$

Als Endergebnis erhalten wir somit

$$\widehat{f}(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1/\sigma)}e^{\frac{-\omega^2}{2\cdot(1/\sigma)^2}}\,,$$

wobei die kompliziertere zweite Form zeigt, daß es sich abgesehen vom Vorfaktor $\sqrt{2\pi}/\sigma$ wieder um eine GAUSS-Funktion handelt, allerdings mit Varianz $1/\sigma^2$.

Mit der Abkürzung

$$N_\sigma(t) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$$

können wir kurz schreiben

$$\widehat{N_\sigma}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} N_{1/\sigma}(\omega)\,.$$

Damit kennen wir natürlich auch die inverse FOURIER-Transformierte einer GAUSS-Funktion, denn nach den allgemeinen Rechenregeln ist

$$\check{N}_\sigma(\omega) = \frac{1}{2\pi}\widehat{N_\sigma}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} N_{\frac{1}{\sigma}}(\omega)\,.$$

Insbesondere können wir damit nachrechnen, daß die *inverse* FOURIER-Transformation zumindest in diesem Beispiel tatsächlich invers zur FOURIER-Transformation ist, d.h.

$$\check{\widehat{N}}_\sigma(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\check{N}_{\frac{1}{\sigma}}(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sigma}} N_\sigma(t) = N_\sigma(t)\,.$$

Genauso zeigt man, daß auch $\hat{\check{N}}_{\sigma(t)} = N_\sigma(t)$ ist; die beiden Transformationen sind hier also in der Tat invers zueinander.

c) Die Umkehrung der Fourier-Transformation

Wie angekündigt, soll aus dem Beispiel des vorigen Abschnitts nun in einem zweiten Schritt gefolgert werden, daß dies nicht nur für die Funktionen N_σ gilt, sondern für *alle* Funktionen aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, d.h.

Satz: Die FOURIER-Transformation und die inverse FOURIER-Transformation definieren zueinander inverse lineare Abbildungen

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \widehat{f} \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ g \mapsto \check{g} \end{cases}.$$

Insbesondere sind also beide Abbildungen Isomorphismen, und für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$$\check{\widehat{f}}(t) = f(t)\,.$$

Für das HERMITEsche Skalarprodukt auf $\mathcal{S}^2(\mathbb{R})$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)}\,d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\omega)\overline{\check{g}(\omega)}\,d\omega\,,$$

und damit insbesondere auch

$$\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|\widehat{f}\right\|_2 = \sqrt{2\pi}\left\|\check{f}\right\|_2 \quad \text{mit} \quad \|f\|_2 = \sqrt{(f,\,f)}\,.$$

Beweis: Die Linearität ist, wie bei jedem Integral, klar; das Problem ist, ob $\widehat{f}$ und $\check{g}$ stark abfallend sind. Betrachten wir zunächst nur die Produkte $\omega^r\widehat{f}(\omega)$. Für diese ist

$$\left|\omega^r\widehat{f}(\omega)\right| = \left|(-i)^r\widehat{f^{(r)}}(\omega)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(t)e^{-i\omega t}\,dt\right|$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty}\left|f^{(r)}(t)\right|\,dt < \infty\,,$$

da f stark abfallend ist. Für

$$\omega^r\widehat{f}^{(k)}(\omega) = \omega^r(-i)^k\widehat{t^k f}(\omega)$$

können wir genauso argumentieren, und wegen des Zusammenhangs zwischen FOURIER-Transformation und inverser FOURIER-Transformation folgt daraus auch das Ergebnis für $\check{g}$.

Als nächstes wollen wir uns überlegen, daß für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\check{\widehat{f}}(t) = f(t)$$

ist. Dazu benutzen wir zwei zunächst beliebige weitere Funktionen $g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, die wir im Laufe der Rechnung nach Bedarf genauer festlegen werden.

Nach Definition ist

$$\check{\widehat{f}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\,;$$

wir betrachten das etwas allgemeinere Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}g(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega s}ds \right) e^{i\omega t}g(\omega)\,d\omega\,,$$

das wir nach dem Satz von FUBINI weiter ausrechnen können als

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega(s-t)}\,d\omega \right)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\widehat{g}(s-t)\,ds\,.$$

Nun sei a eine positive reelle Konstante und $g(\omega) = h(a\omega)$, wobei die Funktion $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ im Augenblick noch beliebig ist. Dann führt die Substitution $\nu = a\omega$ auf

$$\begin{aligned}\widehat{g}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(a\omega)e^{-i\omega s}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu)e^{-i\nu\frac{s}{a}}\,\frac{d\nu}{a}\\ &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} h(\nu)e^{-i\nu\frac{s}{a}}\,d\nu = \frac{1}{a}\widehat{h}\left(\frac{s}{a}\right)\,.\end{aligned}$$

und nach obiger Rechnung ist daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}h(a\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cdot\frac{1}{a}\cdot\widehat{h}\left(\frac{s-t}{a}\right)\,ds\,.$$

Mit der neuen Variablen

$$u \underset{\text{def}}{=} \frac{s-t}{a}$$

ist $s = t + au$, und wir können diese Formel auch kürzer schreiben als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}h(a\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+au)\cdot\widehat{h}(u)\,du\,.$$

Beide Seiten sind stetig in a; für $a \to 0$ erhalten wir auf der linken Seite

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}h(0)\,d\omega = h(0)\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = 2\pi\cdot h(0)\cdot\check{\widehat{f}}(t)$$

und rechts

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\widehat{h}(u)\,du = f(t)\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(u)\,du = 2\pi\cdot f(t)\cdot\check{\widehat{h}}(0)\,.$$

Also ist für zwei beliebige Funktionen $f, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ stets

$$h(0)\cdot\check{\widehat{f}}(t) = f(t)\cdot\check{\widehat{h}}(0)\,.$$

Setzen wir nun für h speziell eine GAUSS-Funktion ein, etwa

$$h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{2}}\,,$$

so wissen wir bereits aus dem obigem Beispiel, daß $\check{\widehat{h}}$ und h übereinstimmen; insbesondere haben beide an der Stelle $\omega = 0$ den von null verschiedenen Wert $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, so daß wir durch diesen Wert dividieren können und die gewünschte Formel

$$\check{\widehat{f}}(t) = f(t)$$

erhalten. Wegen der Beziehungen

$$\widehat{\widehat{f}}(\omega) = 2\pi\check{\widehat{f}}(-\omega) \quad\text{und}\quad \check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(-\omega)$$

ist dann auch

$$\widehat{\check{f}}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi f\big(-(-\omega)\big) = f(\omega)\,.$$

Zu beweisen bleibt noch, daß die beiden Transformationen auch das HERMITEsche Skalarprodukt auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ respektieren. Dazu wiederholen wir einfach die Rechnung zu Beginn des Beweises ohne den Faktor $e^{i\omega t}$: Für eine beliebige Funktion $g(\omega)$ aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)g(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \right) g(\omega)\,d\omega$$

nach dem Satz von FUBINI gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega \right)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{g}(t)\,dt\,,$$