Da $I_r \star u_0$ für stetige Funktionen im Limes $r \to 1$ gerade u_0 ist, ist für eine vorgegebene Funktion u_0

$$u(r,\varphi) = I_r \star u_0(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)u_0(\psi)}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\psi)}\, d\psi$$

eine Fortsetzung ins Innere mit $\Delta u(r,\varphi) = 0$. Das ist die POISSONsche Integralformel zur Lösung dieses einfachen Randwertproblems.

SIMÉON DENIS POISSON (1781–1840) studierte zunächst Medizin, dann ab 1798 Mathematik an der *Ecole Polytechnique* bei LAPLACE und LAGRANGE. 1802 bekam er eine Stelle als Astronom am *Bureau des Longitudes*, 1809 wurde er Professor für reine Mathematik an der neugegründeten *Faculté des Sciences*. Er arbeitete hauptsächlich über bestimmte Integrale und FOURIER-Theorie, schrieb aber auch ein wichtiges Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitstheorie (in dem die POISSON-Verteilung erstmalig auftauchte) und Arbeiten über Mechanik, Astronomie, Elektrizität und Magnetismus.

§5: Fourier- und Laplace-Transformationen

In den vorigen Paragraphen haben wir periodische Funktionen mittels ihrer FOURIER-Reihen als Überlagerungen reiner Schwingungen dargestellt. Diese Zerlegung einer Funktion in Sinus- und Kosinusschwingungen verschiedener Frequenzen ist nicht nur für periodische Funktionen nützlich; angesichts der Tatsache, daß das Verhalten vieler elektronischer Bauteile von der Frequenz abhängt, würde man gerne *jede* Funktion entsprechend zerlegen. Es ist allerdings klar, daß FOURIER-Reihen, wie wir sie bislang kennen, dazu nicht geeignet sind: Da dort alle beteiligten Frequenzen Vielfache eine festen Grundfrequenz sind, muß auch die Summe zumindest die der Grundfrequenz entsprechende Periode haben.

Daher brauchen wir für nichtperiodische Funktionen im Allgemeinen ein kontinuierliches Frequenzspektrum; dieses liefert uns für hinreichend

gutartige Funktionen die FOURIER-Transformation. Die LAPLACE-Transformation ist eine Variante davon, die zwar inhaltlich etwas schwerer zu interpretieren ist als die FOURIER-Transformation, die dafür aber für größere Funktionenklassen existiert. Außerdem gibt es zur LAPLACE-Transformation sehr viel ausführlichere Tabellen als zur FOURIER-Transformation

a) Fourier-Reihen und Fourier-Integrale

Zur Konstruktion der FOURIER-Transformation gehen wir aus von FOURIER-Reihen:

Für eine beliebige reelle Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wählen wir dazu zunächst eine (große) Periode T und betrachten die Funktion $f_T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf dem Intervall $(-T/2, T/2]$ mit f übereinstimmt und dann periodisch mit Periode T auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Mit $\omega = 2\pi/T$ ist die FOURIER-Reihe von f_T gleich

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ki\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k = \widehat{f}_T(k) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ki\omega t}\, dt\,.$$

Um f selbst darzustellen, müssen wir T gegen unendlich gehen lassen; um das Verhalten von c_k bei Veränderung von T kontrollieren zu können, definieren wir dazu eine Funktion $C(\nu)$ als

$$C(\nu) \underset{\text{def}}{=} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\nu t}\, dt\,.$$

Mit dieser Definition ist

$$c_k = \frac{1}{T} C(k\omega) = \frac{\omega}{2\pi} C(k\omega)\,,$$

und die FOURIER-Reihe von f_T läßt sich schreiben als

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k\omega) e^{i(k\omega)t} \omega\,.$$

Wäre dies eine endliche Summe, etwa

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} C(k\omega)e^{i(k\omega)t}\omega\,,$$

so könnten wir sie auffassen als RIEMANN-Summe für

$$\int_{-N\omega}^{(N+1)\omega} \frac{1}{2\pi}C(\nu)e^{i\nu t}\,d\nu$$

bei einer äquidistanten Unterteilung mit Intervallbreite ω. Falls also ω gegen Null geht (und damit $T = 2\pi/\omega$ gegen unendlich) und gleichzeitig N gegen unendlich, konvergiert die FOURIER-Reihe gegen das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}C(\nu)e^{i\nu t}\,d\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\nu)e^{i\nu t}\,d\nu\,,$$

sofern dieses existiert. Im Idealfall sollte also gelten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\nu)e^{i\nu t}\,d\nu \quad \text{mit} \quad C(\nu) \underset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\nu t}\,dt\,.$$

Um dies genauer zu untersuchen, geben wir diesen Konstruktionen Namen:

Definition: Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bezeichnen wir die Funktion

$$\widehat{f}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \omega \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt \end{cases},$$

so sie existiert, als FOURIER-Transformierte von f.

Damit sollte dann also gelten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\,,$$

und diese Konstruktion, die f aus $\widehat{f}$ rekonstruiert, heißt *inverse* FOURIER-*Transformation:*

Definition: Für $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bezeichnen wir die Funktion

$$\check{g}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega \end{cases}$$

als inverse FOURIER-Transformierte von g.

Offensichtlich ist

$$\check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(-\omega) \quad \text{und} \quad \widehat{g}(t) = 2\pi\check{g}(-t)\,.$$

Je nach Buch oder Vorlesung werden die Vorfaktoren gelegentlich auch anders gewählt, beispielsweise stand in der HM II bis 1998 der Faktor $1/2\pi$ vor der FOURIER-Transformation selbst statt vor ihrer inversen. Die jetzt gewählte Definition paßt besser zu der aus der hiesigen Elektrotechnik; dort wird die FOURIER-Transformation als

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

definiert, wobei j,wie in der Elektrotechnik üblich, für die in der Mathematik und Physik mit i bezeichnete imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ steht. Demnach ist also $F(j\omega) = \widehat{f}(\omega)$.

Einige Autoren bevorzugen es auch, aus Symmetriegründen bei beiden Transformationen einen Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}$ zu verwenden, so daß je nach Buch durchaus sehr verschiedene Dinge gemeint sein können, wenn von „der“ FOURIER-Transformation und ihrer Umkehrung die Rede ist. In allen Fällen sind die Faktoren aber so aufeinander abgestimmt, daß für hinreichend gutartige Funktionen die Beziehungen

$$\check{\widehat{f}}(t) = f(t) \quad \text{und} \quad \widehat{\check{f}}(t) = f(t)$$

gelten.

b) Die Laplace-Transformation

Die Existenz der FOURIER-Transformierten, d.h. die Konvergenz des uneigentlichen Integrals aus der Definition, sowie auch die obigen Formeln für $\check{\hat{f}}$ und $\hat{\hat{f}}$ sind leider alles andere als selbstverständlich: Für $f(t) = 1$ oder auch $f(t) = e^{i\omega t}$ oder $f(t) = t^n$ und in vielen weiteren Fällen kann das Integral für $\widehat{f}(\omega)$ schon aus ganz trivialen Gründen nicht existieren.

Offensichtlich hat das FOURIER-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

Konvergenzprobleme sowohl an der oberen als auch an der unteren Grenze. Bei vielen Anwendung interessieren Funktionen vor allem für positive Werte von t (die „Zukunft“), während negative Werte (die „Vergangenheit“) vernachlässigt werden können. Um daher eine gegebene Funktion f so abzuändern, daß das FOURIER-Integral an der unteren Grenze keine Konvergenzprobleme mehr hat, setzen wir sie für $t < 0$ einfach auf null.

Für positive t dürfen wir nicht so radikal vorgehen; schließlich soll das Ergebnis noch etwas mit der Funktion f zu tun haben. Deshalb dämpfen wir hier die Funktion nur durch eine Exponentialfunktion. Insgesamt betrachten wir also anstelle von $f(t)$ die Funktion

$$g_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ f(t)e^{-rt} & \text{für } t > 0 \end{cases}.$$

Den Funktionswert an der Stelle 0 legen wir so fest, daß die Funktion dort rechtsseitig stetig ist, d.h.

$$g(0) = f(0^+) = \lim_{t\to 0+} f(t)\,.$$

Die FOURIER-Transformierte dieser Funktion g_r bezeichnen wir, wenn sie existiert, als LAPLACE-Transformierte von f an der Stelle $s = r + i\omega$, in Zeichen

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \underset{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt\,.$$

Für gängige Funktionen f ist $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ ist den meisten Formelsammlungen zu finden; es gibt auch umfangreiche Tabellenwerke, die ausschließlich der LAPLACE-Transformation gewidmet sind. Im allgemeinen wird sie nur für hinreichend große Werte von $r = \mathfrak{Re}\, s$ existieren.

Die inverse LAPLACE-Transformation läßt sich aus der inversen FOURIER-Transformation ableiten: Wegen $\mathcal{L}\{f(t)\}(r + i\omega) = \widehat{g}_r(t)$ sollte $g_r(t)$ die inverse FOURIER-Transformierte von $\mathcal{L}\{f(t)\}(r + i\omega)$ sein; für $t > 0$ sollte daher

$$f(t) = e^{rt}g_r(t) = \frac{e^{rt}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\{f(t)\}(r + i\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

sein. Für $t < 0$ können wir natürlich keine entsprechende Formel erwarten, da die Funktionswerte von f auf der negativen Achse bei der Berechnung der LAPLACE-Transformation ignoriert werden.

c) Erste Beispiele

Als erstes Beispiel betrachten wir die Funktion $f(t) = \sin \omega t$. Ihr FOURIER-Integral

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega t\, e^{-i\omega t}\,dt$$

ist ein unendliches Integral über eine periodische Funktion, existiert also nicht. Auch ein CAUCHYscher Hauptwert kann nicht existieren, denn wenn auch $\sin\omega t$ eine ungerade Funktion ist, ist der Integrand als ganzes weder gerade noch ungerade, da $e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin\omega t$ gerade Realteil, aber ungeraden Imaginärteil hat.

Das LAPLACE-Integral

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \int_0^{\infty} \sin\omega t\, e^{-st}\,dt$$

existiert für rein imaginäres $s = i\omega$ aus dem gleichen Grund nicht, und für ein s mit negativem Realteil kann es natürlich schon gar nicht existieren. Ist aber $\mathfrak{Re}\, s > 0$, so liefert die Regel für partielle Integration

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \int_0^\infty \sin\omega t\, e^{-st}\,dt = \sin\omega t \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \omega\cos\omega t \frac{e^{-st}}{-s}\,dt$$

etwas Verwertbares: e^{-st} geht dann nämlich für $t \to \infty$ gegen null, und an der unteren Grenze $t = 0$ verschwindet $\sin\omega t$, so daß der erste Summand rechts insgesamt verschwindet. Der Integral ganz hinten ist bis auf den Faktor $-\omega/s$ die LAPLACE-Transformierte des Kosinus, d.h.

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s}\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s)\,.$$

Auf das LAPLACE-Integral für den Kosinus wenden wir wieder die Regel der partiellen Integration an:

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \int_0^\infty \cos\omega t\, e^{-st}\,dt = \cos\omega t \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \omega\sin\omega t \frac{e^{-st}}{-s}\,dt\,.$$

Hier bekommen wir an der unteren Grenze des ersten Terms rechts den Wert eins für den Kosinus, und an der oberen Grenze geht natürlich wieder der Exponentialfaktor gegen null, so daß

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{1}{s} + \frac{\omega}{s}\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s)$$

ist. Insgesamt ist

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s}\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2}\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s)$$

oder

$$\left(1 + \frac{\omega^2}{s^2}\right)\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2}\,.$$

Multiplikation mit s^2 macht daraus

$$(s^2 + \omega^2)\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \omega \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

für $\mathfrak{Re}\, s > 0$. Damit kennen wir auch

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{\omega}\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}\,.$$

Auch bei den Potenzfunktionen $t \mapsto t^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es offensichtlich keine Chance, daß das FOURIER-Integral

$$\int_{-\infty}^\infty t^n e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^\infty t^n \cos\omega t\,dt - i\int_{-\infty}^\infty t^n \sin\omega t\,dt$$

existiert; selbst der CAUCHYsche Hauptwert existiert nicht, denn wenn der Integrand des Realteils ungerade ist, ist der des Imaginärteils gerade und umgekehrt.

Die LAPLACE-Transformation verlangt die Berechnung von

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt\,.$$

Dieses Integral könnten wir induktiv durch partielle Integration berechnen; falls wir allerdings für n auch nicht ganzzahlige Werte einsetzen wollen, läßt es sich nicht mehr durch die uns bislang bekannten Funktionen ausdrücken.

Es läßt sich jedoch leicht zurückführen auf die sogenannte EULERsche *Gammafunktion*, die für positive Werte von x (oder allgemeiner für komplexe x mit positivem Realteil) definiert ist als

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt\,.$$

Dies ist ein uneigentliches Integral: Es ist natürlich immer uneigentlich an der oberen Grenze, und für $0 < x < 1$ zusätzlich auch noch an der unteren. (Für $\mathfrak{Re}\, x \le 0$ divergiert das Integral.)

Die untere Grenze ist harmlos, denn für $0 < x < 1$ ist

$$e^{-t}t^{x-1} \le t^{x-1}\,,$$

und für $0 < x < 1$ hat die Stammfunktion $\frac{t^x}{x}$ der rechten Seite einfach den Wert Null für $t = 0$.

Auch die obere Grenze ist unproblematisch: Da die Exponentialfunktion stärker wächst als jede Potenz, ist für hinreichend große Werte von t

$$e^t \ge t^{r+x-1} \iff e^{-t}t^{x-1} \le \frac{K}{t^r}\,.$$

Dies gilt insbesondere für $r = 2$, und da $\int_1^\infty \frac{dr}{r^2} = 1$ konvergiert, gilt dasselbe für $\Gamma(x)$ an seiner oberen Grenze.

Die wichtigste Eigenschaft der Γ-Funktion folgt durch partielle Integration: Für $x > 0$ ist

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt = e^{-t} \frac{t^x}{x} \Big|_0^\infty + \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-t} t^x\, dt = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

oder

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) .$$

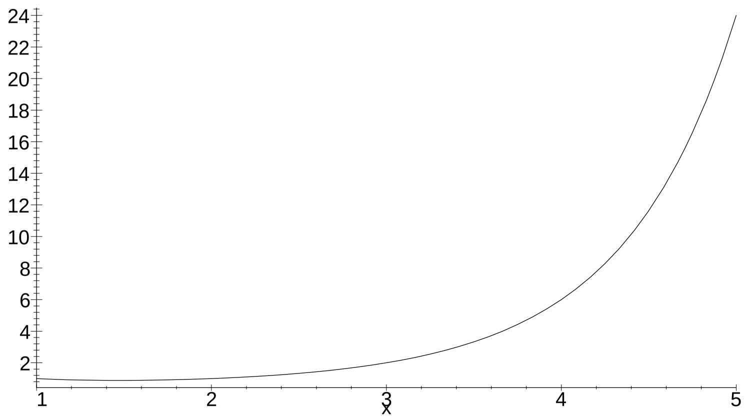


Abb. 15: Die Γ-Funktion

Aus dem elementar berechenbaren Wert

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = -e^{-t} \Big|_0^\infty = 1$$

ergibt sich somit, daß für alle natürliche Zahlen n gilt $\Gamma(n) = (n-1)!$; die Γ-Funktion ist also nicht als eine Art stetig gemachter Fakultätsfunktion.

GAUSS definierte auf andere Weise eine stetige Funktion $\Pi(x)$, für die $\Pi(n) = n!$ ist, aber wie sich bald herausstellte, ist $\Pi(x) = \Gamma(x+1)$, so daß nur eine der beiden Funktionen wirklich gebraucht wird. Nach einigen Modewechseln im letzten Jahrhundert entscheidet

man sich heute meist für $\Gamma(x)$: Diese Funktionswerte sind in Tafelwerken tabelliert, und numerische Verfahren für ihre Berechnung stehen in den einschlägigen Unterprogrammbibliotheken und Computeralgebrasystemen zur Verfügung. Tatsächlich läßt sich $\Gamma(x)$ mit Hilfe komplexer Integrale sogar fortsetzen zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion mit der Eigenschaft $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$; die einzigen Pole sind die durch diese Eigenschaft erzwungenen bei Null und den negativen ganzen Zahlen.

Mit dieser Funktion können wir die LAPLACE-Transformierte von $f(t) = t^n$ sogar für jede *reelle* Zahl $n > -1$ leicht ausdrücken: Mit der Substitution $u = st$ wird

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \int_0^\infty t^n e^{-st}\, dt = \int_0^\infty \frac{u^n}{s^n} e^{-u} \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty u^n e^{-u}\, du = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} .$$

Für nichtnegative ganze Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ vereinfacht sich dies zu

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} .$$

Insbesondere ist die LAPLACE-Transformierte einer konstanten Funktion $f(t) = a$ gleich a/s. Genau dieselbe Transformierte hat natürlich auch die Sprungfunktion

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} ,$$

denn auf Werte an negativen Stellen kommt es bei der LAPLACE-Transformation nicht an.

Als nächstes wollen wir negative Potenzen t^{-n} betrachten. Deren LAPLACE-Transformation ist gegeben durch

$$\mathcal{L}\{t^{-n}\}(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{t^n}\, dt ,$$

und dieses sowohl an der oberen als auch an der unteren Grenze uneigentliche Integral existiert leider nicht: Für reelles $s > 0$ etwa ist für jedes $a > 0$ die Funktion e^{-as}/t^n überall im Intervall $(0, a]$ kleiner oder gleich dem Integranden; da ihre Stammfunktion $e^{-as}/(1-n)t^{n-1}$ für $n > 1$ und $e^{-as} \ln t$ für $n = 1$ für $t \to 0$ gegen unendlich geht, existiert das Integral

$$\int_0^a \frac{e^{-as}}{t^n}\,dt$$

für kein $a > 0$, und damit existiert erst recht das obige LAPLACE-Integral nicht.

Als Kuriosität am Rande sei erwähnt, daß dafür aber (nur) der CAUCHYsche Hauptwert des entsprechenden FOURIER-Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t^n}\,dt$$

existiert: Für $n = 1$ haben wir in §3*f)* im Zusammenhang mit dem Integralsinus nachgerechnet, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t}\,dt = \pi i \quad \text{für alle } \omega > 0\,.$$

Ersetzen wir hier ω durch $-\omega$, wird der Integrand komplex konjugiert, also auch der CAUCHYsche Hauptwert des Integrals, und damit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t}\,dt = -\pi i \quad \text{für alle } \omega < 0\,.$$

Für $\omega = 0$ haben wir das Integral über $1/t$, das natürlich ebenfalls nicht existiert, das aber den CAUCHYschen Hauptwert null hat, da der Integrand ungerade ist. Der CAUCHYsche Hauptwert des FOURIER-Integrals ist also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t}\,dt = \begin{cases} -\pi i & \text{für } \omega > 0 \\ 0 & \text{für } \omega = 0 \\ \pi i & \text{für } \omega < 0 \end{cases}.$$

Für $n > 1$ kann man genau wie in §3*f)* argumentieren und erhält (mit den dortigen Bezeichnungen) die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t^n}\,dt = \lim_{\delta\to 0} \int_{\alpha_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z^n}\,dz$$

für den CAUCHYschen Hauptwert. Reihenentwicklung der Exponentialfunktion führt auf

$$\int_{\alpha_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z^n} = \int_{\alpha_\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^k z^{k-n}}{k!}\,dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^k}{k!} \int_{\alpha_\delta} z^{k-n}\,dz\,.$$

Für $k = n-1$ ist das rechtsstehende Integral

$$\int_{\alpha_\delta} z^{-1}\,dz = \mathrm{Ln}(\delta) - \mathrm{Ln}(-\delta) = \mathrm{Ln}(-1) = -\pi i$$

unabhängig von δ; im Falle $k \neq n-1$ verschwindet

$$\int_{\alpha_\delta} z^{k-n}\,dz = \frac{\delta^{k-n+1} - (-\delta)^{k-n+1}}{k}$$

für $k \equiv n-1 \bmod 2$ und ist gleich $2\delta^k/k$ sonst. Da die geometrische Reihe $2\sum_{k=1}^{\infty}\delta^k$ eine konvergente Majorante der Summe aller solcher Terme ist und für $\delta \to 0$ gegen null geht, folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t^n}\,dt = \lim_{\delta\to 0} \int_{\alpha_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z^n}\,dz = \frac{(i\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot \pi i \quad \text{für } \omega > 0\,.$$

Für $\omega < 0$ wird wieder der Integrand komplex konjugiert, also auch das Ergebnis; im Faktor $(i\omega)^{n-1}$ sorgt ω selbst für die komplexe Konjugation, so daß rechts nur πi konjugiert werden muß, d.h. der CAUCHYsche Hauptwert des FOURIER-Integrals ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t^n}\,dt = \begin{cases} -\frac{(i\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\pi & \text{für } \omega > 0 \\ \frac{(i\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\pi & \text{für } \omega > 0 \end{cases}.$$

Für $\omega = 0$ haben wir das Integral über $1/t^n$, daß für ungerades n den CAUCHYschen Hauptwert null hat und für gerades n gegen unendlich divergiert.

Als letztes Beispiel wollen wir eine der wichtigsten Funktionen der Elektrotechnik betrachten, den *Rechteckimpuls.* Wir beschränken uns hier auf einen zum Nullpunkt symmetrischen Impuls der Form

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{für } -b \le t \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Hier ist

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-b}^{b} ae^{-i\omega t}\,dt = \frac{a}{-i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{-b}^{b}$$
$$= \frac{a}{\omega}\,\frac{e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}}{i} = \frac{2a\sin\omega b}{\omega}\,.$$

Mit der in der Elektrotechnik sehr wichtigen Funktion

$$\operatorname{sinc} t = \frac{\sin t}{t}$$

läßt sich dies auch schreiben als

$$\widehat{f}(\omega) = 2ab\operatorname{sinc}\omega b\,.$$

(Anstelle von $\operatorname{sinc} t$ schreiben manche Autoren auch $\operatorname{si} t$, man darf die Funktion aber nicht mit Ihrer Stammfunktion, dem Integralsinus $\operatorname{Si} t$, verwechseln.)

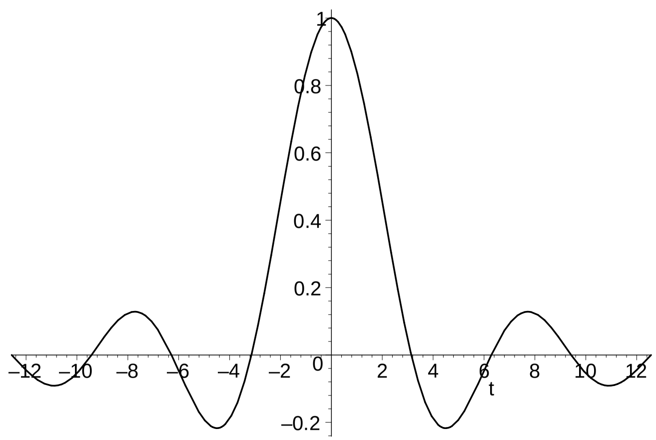


Abb. 16: Die Funktion $\operatorname{sinc} t = \frac{\sin t}{t}$

Die LAPLACE-Transformierte dieses Rechteckimpulses ist

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^{b} ae^{-st}\,dt = \frac{a}{s}\left(1 - e^{-sb}\right)\,,$$

und das ist gleichzeitig auch die LAPLACE-Transformierte der Rechteckimpulse

$$g(t) = \begin{cases} a & \text{für } 0 \le t \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad h(t) = \begin{cases} a & \text{für } t \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,.$$

Dagegen existiert die FOURIER-Transformierte $\widehat{h}(\omega)$ nicht einmal, und auch

$$\widehat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_0^{b} ae^{-i\omega t}\,dt = \frac{a}{-i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_0^{b}$$
$$= \frac{ia}{\omega}(e^{-i\omega b} - 1)$$

ist deutlich verschieden von $\widehat{f}(\omega)$.

d) Erste Rechenregeln

Die gerade betrachteten Beispiele sind zwar mit die wichtigsten Funktionen, die in den gängigen Anwendungen auftauchen; allerdings findet man sie dort selten als *reine* Sinus- oder Kosinusschwingungen oder als *reine* Potenzen; häufiger sind Linearkombinationen dieser Funktionen, eventuell noch verbunden mit Phasenverschiebungen und anderen Transformationen des Arguments. In diesem Abschnitt sollen die wichtigsten Rechenregeln zusammengestellt werden, die in solchen Situationen gebraucht werden.

Die fundamentalste und einfachste Regel ist

Lemma: Sowohl die FOURIER- als auch die LAPLACE-Transformation sind lineare Operationen, d.h. für zwei Funktionen f, g und zwei komplexe Zahlen λ, μ gilt

$$\widehat{\lambda f + \mu g}(\omega) = \lambda\widehat{f}(\omega) + \mu\widehat{g}(\omega)$$

und

$$\mathcal{L}\{\lambda f + \mu g\}(s) = \lambda\mathcal{L}\{f\}(s) + \mu\mathcal{L}\{g\}(s)\,,$$

sofern jeweils beide Seiten existieren. ■

Damit ist etwa

$$\mathcal{L}\{a\cos\omega t + b\sin\omega t\}(s) = \frac{as+b\omega}{s^2+\omega^2}\,,$$

und entsprechend läßt sich auch die LAPLACE-Transformation jedes trigonometrischen Polynoms berechnen.

Für ein Polynom $f(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ ist entsprechend

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{n!a_n}{s^{n+1}} + \frac{(n-1)!a_{n-1}}{s^n} + \cdots + \frac{a_1}{s^2} + \frac{a_0}{s} = \frac{n!a_n + (n-1)!a_{n-1}s + \cdots + a_1 s^{n-1} + a_0 s^n}{s^{n+1}}\,.$$

Ebenfalls sehr einfach läßt sich der Effekt von Verschiebungen sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich ausdrücken: Die FOURIER-Transformierte von $g(t) = f(t+c)$ berechnet sich mittels der Substitution $u = t + c$ als

$$\widehat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+c)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega(u-c)}\,du = e^{i\omega c}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}\,du = e^{i\omega c}\widehat{f}(\omega)$$

und die LAPLACE-Transformierte als

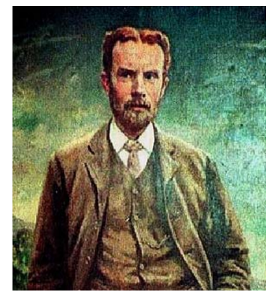
$$\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \int_0^{\infty} f(t+c)e^{-st}\,dt = \int_c^{\infty} f(u)e^{-s(u-c)}\,du = e^{sc}\int_c^{\infty} f(u)e^{-su}\,du\,,$$

eine Formel, die wegen der geänderten unteren Integrationsgrenze nicht sonderlich nützlich aussieht. Allerdings war hier auch von vornherein nicht viel zu erwarten, denn schon zur Definition der LAPLACE-Transformation müssen wir schließlich einen festen Zeitpunkt als Nullpunkt der Zeitskala auszeichnen, und niemand sollte sich wundern, daß Transformationen, die diese Auszeichnung nicht respektieren, bei der LAPLACE-Transformation zu Problemen führen. Man kann freilich das hintere Integral zumindest für $c > 0$ mit Gewalt als LAPLACE-Transformation auffassen, indem man den Integranden mit einer geeigneten Sprungfunktion multipliziert:

Die HEAVISIDE-Funktion ist definiert durch

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}\,.$$

Ein Funktionswert an der Stelle Null wird üblicherweise nicht definiert, die die Funktion praktisch immer nur in Integralen auftritt, wo es auf diesen einen Wert ohnehin nicht ankommt.



OLIVER HEAVISIDE (1850–1925) wurde in den Londoner Slums geboren und hatte nur wenig formale Ausbildung; an akademischer Wissenschaft hatte er zeitlebens kein Interesse. Unter dem Einfluß seines Onkels CHARLES WHEATSTONE (nach dem die gleichnamige Brücke benannt ist) wandte er sich zur Telegraphie und arbeitete als Telegraphist zunächst in Dänemark, dann in Newcastle. In diesem Zusammenhang beschäftigte er sich mit Elektrizitätslehre; unter anderem brachte er die MAXWELLschen Originalgleichungen (20 Gleichungen in 20 Unkenannten) auf die heute übliche Form. Weiter untersuchte er die Bedingungen für die störungsfreie Übertragung eines Signals, sagte die für weltweiten Kurzwellenfunk wesentliche Reflektionseigenschaft der Ionosphäre (HEAVISIDE-Schicht) voraus und entwickelte einen Operatorkalkül zur Übersetzung von Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen.

Mit Hilfe dieser Funktion können wir obige Gleichung umschreiben als

$$\mathcal{L}\{f(t+c)\}(s) = e^{sc}\mathcal{L}\{f(t)H(t-c)\}(s)\,.$$

Im Frequenzbereich gibt es keine solchen Probleme; hier ist einfach

$$\widehat{f}(\omega+c) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\omega+c)t}\,dt = \widehat{e^{-ict}f}(\omega)$$

und

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s+c) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+c)t}\,dt = \mathcal{L}\{e^{-ct}f(t)\}(s)\,.$$

Diese Formeln sind auch rückwärts gelesen sehr nützlich: Wollen wir etwa die LAPLACE-Transformierte einer gedämpften Schwingung

$$f(t) = e^{-\lambda t}(a\cos\omega t + b\sin\omega t)$$

berechnen, so ist

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{a\cos\omega t + b\sin\omega t\}(s+\lambda) = \frac{a(s+\lambda)+b\omega}{(s+\lambda)^2+\omega^2}\,.$$

Auch die LAPLACE-Transformierte der Exponentialfunktion selbst läßt sich so ausrechnen: Für $\mathfrak{Re}\, s > \lambda$ ist

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s-\lambda) = \frac{1}{s-\lambda}\,,$$

denn auf $1 = t^0$ können wir die Formel für t-Potenzen anwenden.

Die FOURIER-Transformierte einer Exponentialfunktion existiert natürlich nicht, da das FOURIER-Integral immer an mindestens einer der beiden Grenzen divergiert.

Schließlich können wir noch ohne großen Aufwand den Effekt einer Streckung im Zeit- oder Frequenzbereich ausrechnen: Für $g(t) = f(ct)$ zeigt die Substitution $u = ct$, daß gilt

$$\widehat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(ct)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\frac{\omega}{c}u}\,\frac{du}{c} = \frac{1}{c}\widehat{f}\Big(\frac{\omega}{c}\Big)$$

und

$$\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \int_0^{\infty} f(ct)e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} f(u)e^{-\frac{s}{c}u}\,\frac{du}{c} = \frac{1}{c}\mathcal{L}\{f(t)\}\Big(\frac{s}{c}\Big)\,.$$

Das Verhalten von FOURIER- und LAPLACE-Transformation im Zusammenhang mit Ableitungen, Produkten und Faltungen werden wir in den nächsten beiden Paragraphen ausführlich untersuchen.

§6: Ableitungen und Differentialgleichungen

Als erstes wollen wir die Transformationen von Ableitungen und die Ableitungen von Transformationen betrachten; wie sich zeigen wird, führt dies zu einer Methode, mit der sich Anfangswertprobleme für lineare Differentialgleichungen oft recht bequem lösen lassen. Es lohnt sich daher, zuerst noch etwas in Vorbereitungen zu investieren, um das notwendige Werkzeug bereitszustellen.

a) Ableitungen unter dem Integralzeichen

Lemma: *a)* Die Funktion $h\colon [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist auch

$$H\colon \begin{cases} [a,b] \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto \displaystyle\int_c^d h(\omega,t)\,dt \end{cases}$$

stetig.
b) Ist h zusätzlich r-mal stetig partiell nach der ersten Variablen ω differenzierbar, so ist

$$\frac{d^rH}{d\omega^r}(\omega) = \int_c^d \frac{\partial^r h}{\partial\omega^r}(\omega,t)\,dt\,.$$

Beweis: a) Da $[a,b]$ und $[c,d]$ abgeschlossene Intervalle sind, ist h nicht nur stetig, sondern sogar gleichmäßig stetig. Es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jedes $t \in [c,d]$ gilt

$$|h(\omega_1,t) - h(\omega_2,t)| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad |\omega_1-\omega_2| < \delta\,.$$

Für solche ω_1 und ω_2 ist dann

$$|H(\omega_1) - H(\omega_2)| \le \int_c^d |h(\omega_1,t) - h(\omega_2,t)|\;dt < \varepsilon(d-c)\,.$$

Da $d-c$ eine Konstante ist, läßt sich dies durch Wahl von $\varepsilon = \eta/(d-c)$ unter jedes vorgegebene $\eta > 0$ drücken.

b) Für $\Delta \neq 0$ ist

$$\frac{H(\omega+\Delta)-H(\omega)}{\Delta} = \int_c^d \frac{h(\omega+\Delta,t)-h(\omega,t)}{\Delta}\,dt\,,$$

und der rechtsstehende Integrand ist nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gleich $\frac{\partial h}{\partial\omega}(\xi,t)$ für ein ξ zwischen ω und $\omega+\Delta$. Für $\Delta \to 0$ geht dies gegen $\frac{\partial h}{\partial\omega}(\omega,t)$, und da die partielle Ableitung als stetig vorausgesetzt wurde, gilt wegen *a)*, daß

$$H'(\omega) = \lim_{\xi\to\omega}\int_c^d \frac{\partial h}{\partial\omega}(\xi,t)\,dt = \int_c^d \frac{\partial h}{\partial\omega}(\omega,t)\,dt$$

ist, wie behauptet. Für $r > 1$ folgt die Behauptung induktiv. ■

Als erste Anwendung folgt ein Satz über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge, der für die Inversion der FOURIER-Transformation fundamental sein wird:

Satz von Fubini: Für eine stetige Funktion $h\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ ist

$$\int_a^b\left(\int_c^d h(\omega,t)\,dt\right)d\omega = \int_c^d\left(\int_a^b h(\omega,t)\,d\omega\right)dt\,.$$

Beweis: Das folgt entweder aus der zweidimensionalen Integrationstheorie in **[HM1]**, Kap. II, §6*b)*, da beide Seiten das Integral

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} h(\omega,t)\,d\omega\,dt$$

berechnen, wobei das Rechteck $[a,b]\times[c,d]$ als Normalbereich einmal vom Typ I und einmal vom Typ II aufgefaßt wird. Es folgt aber auch leicht aus dem gerade bewiesenen Lemma:

Für $a \le \omega \le b$ sei

$$H(\omega) = \int_c^d\left(\int_a^\omega h(\xi,t)\,d\xi\right)dt\,.$$

Nach der zweiten Aussage des gerade bewiesenen Lemmas ist dann

$$H'(\omega) = \int_c^d h(\omega,t)\,dt\,,$$

also ist die linke Seite der zu beweisenden Gleichung

$$\int_a^b\left(\int_c^d h(\omega,t)\,dt\right)d\omega = \int_a^b H'(\omega)\,d\omega = H(b)-H(a) = H(b)\,,$$

und das ist nach Konstruktion gleich der rechten Seite. ■

Der italienische Mathematiker GUIDO FUBINI (1879–1943) arbeitete zunächst auf dem Gebiet der Differentialgeometrie, interessierte sich dann aber immer mehr für analytische Themen wie Differentialgleichungen und Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher. 1901 wurde er Professor in Catania auf Sizilien, später in Genua und ab 1908 in Turin, wo er blieb, bis er 1939 trotz seiner angegriffenen Gesundheit wegen des italienischen Faschismus nach USA emigrierte und ans Institute for Advanced Study in Princeton wechselte. Der hier zitierte Satz ist zwar sein bekanntestes, aber ganz sicher nicht sein bedeutendstes Ergebnis.

Wir interessieren uns im Augenblick nicht für Integrale über endliche Intervalle, sondern für Integrale über die gesamte reelle Gerade; bevor wir den gerade bewiesenen Satz auf FOURIER-Integrale anwenden können, müssen wir also noch den Grenzübergang $a,c\to-\infty$ und $b,d\to+\infty$ durchführen. Nach dem WEIERSTRASSschen Konvergenzkriterium gibt es hier keine Probleme, *falls* die betroffenen Integrale absolut konvergent sind. Die für uns interessante Version des Satzes von FUBINI ist also

Satz: Die stetige Funktion $h\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sei so, daß die uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|h(\omega,t)|\,dt\right)d\omega \quad\text{und}\quad \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|h(\omega,t)|\,d\omega\right)dt$$

beide konvergieren. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega,t)\,dt\right)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega,t)\,d\omega\right)dt\,.$$

■

b) Transformationen und Ableitungen

Die Aussagen des vorigen Abschnitts führen geradewegs auf Eigenschaften der FOURIER-Transformation; als erstes erhalten wir

Lemma: Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ mindestens r mal stetig differenzierbar und existieren die FOURIER-Transformationen von $f, t^r f$ und $f^{(r)}$, so ist

$$\frac{d^r}{d\omega^r}\widehat{f}(\omega) = (-i)^r\,\widehat{t^r f}(\omega)$$

und

$$\omega^r\,\widehat{f}(\omega) = (-i)^r\,\widehat{f^{(r)}}(\omega)\,.$$

Beweis: Nach dem Lemma im vorigen Abschnitt ist

$$\frac{d^r\widehat{f}(\omega)}{d\omega^r} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^r}{d\omega^r}\left(f(t)e^{-i\omega t}\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty}(-it)^r f(t)e^{-i\omega t}\,dt = (-i)^r\,\widehat{t^r f}(\omega)\,,$$

womit die erste Aussage bewiesen wäre.

Für die zweite begnügen wir uns der Einfachheit halber mit dem Fall $r = 1$, aus dem die allgemeine Aussage per Induktion folgt. Für $r = 1$ ist

$$\omega\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\omega e^{-i\omega t}\,dt\,,$$

und dieses Integral läßt sich durch partielle Integration weiter umformen. Dazu nehmen wir $f(t)$ als den ersten Faktor und $\omega e^{-i\omega t}$ als den zweiten; letzterer hat die Stammfunktion

$$\frac{\omega e^{-i\omega t}}{-i\omega} = ie^{-i\omega t}\,,$$

und wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\omega e^{-i\omega t}\,dt = f(t)\cdot ie^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\dot f(t)\cdot ie^{-i\omega t}\,dt\,.$$

Da die FOURIER-Transformierte von f existiert, $f(t)$ für $t\to\pm\infty$ gegen null; der erste Summand verschwindet also, und übrig bleibt

$$\omega\widehat{f}(\omega) = -i\int_{-\infty}^{\infty}\dot f(t)e^{-i\omega t}\,dt = -i\cdot\widehat{\dot f}(\omega)\,.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Für die LAPLACE-Transformation gelten ähnliche Regeln: Falls die Funktion f mindestens r mal stetig differenzierbar ist und die LAPLACE-Transformierten ihrer Ableitungen existieren, ist nach der Regel über partielle Integration

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\dot f(t)\}(s) &= \int_0^{\infty}\dot f(t)e^{-st}\,dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt\\ &= -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}(s)\end{aligned}$$

und damit induktiv

$$\mathcal{L}\{f^{(r)}(t)\}(s) = s^r\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - s^{r-1}f(0) - s^{r-2}\dot f(0) - \cdots - f^{(r-1)}(0)\,.$$

Dies ist etwas komplizierter als bei der FOURIER-Transformation, wo wir keine Funktionswerte an der Stelle null berücksichtigen mußten, aber für die Anwendung auf Differentialgleichungen ist das meist ein *Vorteil:*

In der Praxis hat man es fast immer mit sogenannten *Anfangswertproblemen* zu tun, d.h. man kennt den Zustand eines Systems (beschreiben durch eine Funktion $f(t)$ der Zeit) zu einem gewissen Zeitpunkt t_0, den wir der Einfachheit halber als null annehmen wollen, und man kennt Naturgesetze für die weitere Entwicklung des Systems. Letztere haben meist die Form von Differentialgleichungen; ein Anfangswertproblem besteht darin, daß man anhand der Differentialgleichung und der bekannten Funktionswerte zum Zeitpunkt t_0 die weitere Entwicklung des Systems berechnen will, d.h. die Funktion f. Es geht also um die Bestimmung einer Funktion $y(t)$ mit den Eigenschaften, daß

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = b(t)$$

ist und

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{n-1}(0) = y_{n-1}\,.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation macht daraus die algebraische Gleichung

$$\begin{aligned} & s^n\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s^{n-1}y_0 - s^{n-2}y_1 - \cdots - y_{(n-1)} \\ +\, & a_{n-1}s^{n-1}\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s^{n-2}y_0 - s^{n-3}y_1 - \cdots - y_{(n-2)} \\ & \vdots \\ +\, & a_1 s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - y_0 \\ +\, & a_0\mathcal{L}\{y(t)\}(s) \qquad = \qquad \mathcal{L}\{b(t)\}(s) \end{aligned}$$

für $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, die man – so die rechte Seite existiert – leicht nach $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ auflösen kann. Rücktransformation (meist anhand einer Tabelle) führt auf die Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems.

Auch die Ableitung der LAPLACE-Transformierten läßt sich leicht berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}\bigl(f(t)e^{-st}\bigr)\,dt \\ &= -\int_0^\infty tf(t)e^{-st}\,dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s)\,; \end{aligned}$$

hier sieht das Ergebnis also bis auf den etwas anderen Vorfaktor genauso aus wie bei der FOURIER-Transformation.

c) Ungedämpfte Schwingungen

Als erstes Beispiel betrachten wir die extrem einfache Gleichung für eine Masse an einer Feder, die sich reibungsfrei in x-Richtung bewegen kann:

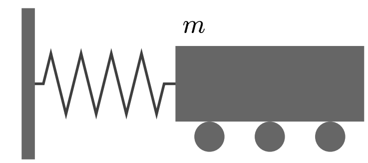


Abb. 17: Eine schwingende Masse

Nach dem HOOKEschen Gesetz wirkt auf diese Masse eine Rückstellkraft $\lambda x(t)$, die proportional ist zur Auslenkung $x(t)$ aus der Ruhelage; nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz ist diese Kraft (eine zeitlich konstante Masse m vorausgesetzt) gleich $m\ddot{x}(t)$. Insgesamt ist also

$$m\ddot{x}(t) + \lambda x(t) = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{x}(t) + \frac{\lambda}{m}x(t) = 0\,.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation macht daraus

$$s^2\mathcal{L}\{x(t)\}(s) - s\cdot x(0) - \dot{x}(0) + \frac{\lambda}{m}\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = 0$$

oder

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{s\cdot x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + \frac{\lambda}{m}}\,.$$

Die schwingende Masse m soll natürlich positiv sein, und auch λ ist größer als null, da $\lambda x(t)$ die *Rückstellkraft* ist. Also ist

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{x(0)\cdot s}{s^2+\omega^2} + \frac{\dot{x}(0)}{s^2+\omega^2} \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{m}}\,.$$

Hier erkennen wir die gerade berechneten LAPLACE-Transformiert en

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$