

§2: Reelle und komplexe Fourier-Reihen

Wir beginnen mit einem einfachen und anschaulichen Beispiel für den Aufbau einer komplizierten Funktion aus reinen Schwingungen; Ziel des Paragraphen wird sein, eine (fast) *beliebige* periodische Funktion möglichst exakt als Überlagerung solcher Schwingungen darzustellen.

a) Die schwingende Saite

Ein Ton werde erzeugt durch eine schwingende Saite. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß diese ausschließlich senkrecht zu ihrer Ruhelage schwingt und daß ihre Schwingung auf eine feste Ebene begrenzt ist; die Physiker bezeichnen dies als eine transversale linear polarisierte Schwingung. Zumindest in erster Näherung kann man, bei nicht zu extremer Auslenkung der Saiten, einige Musikinstrumente so beschreiben.

Der Zustand der Saite zu einem *festen Zeitpunkt* wird beschrieben durch eine Funktion der Längenkoordinate, die wir wie üblich mit x bezeichnen wollen. Der Wert dieser Funktion an jeder Stelle x ist aber, da die Saite schwingt, auch eine Funktion der Zeit. Wir haben also insgesamt eine Funktion $f(x, t)$ sowohl der Längenkoordinate als auch der Zeit, die angibt, wie weit der Punkt mit Längenkoordinate x zum Zeitpunkt t von seiner Ruhelage entfernt ist. Falls wir annehmen, daß die Schwingung in der (x, y) -Ebene stattfindet, ist $f(x, t)$ also die y -Koordinate des Punktes mit Längenkoordinate x zum Zeitpunkt t . Da wir nur transversale linear polarisierte Schwingungen betrachten, hat dieser Punkt die Koordinaten

$$(x, f(x, t));$$

falls wir auch longitudinale Schwingungen zugelassen hätten, würde auch die x -Koordinate von der Zeit abhängen, und falls wir uns nicht auf linear polarisierte Schwingungen festgelegt hätten, gäbe es noch eine z -Koordinate.

Die Saite ist an beiden Enden fest eingespannt; wir wählen die Koordinaten auf der x -Achse so, daß diese Enden den Werten $x = 0$ und $x = L$ entsprechen, wobei $L \in \mathbb{R}$ die Länge der Saite bezeichnet. Da die Enden

nicht schwingen können, muß notwendigerweise

$$f(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad f(L, t) = 0$$

sein; nur für $0 < x < L$ kann $f(x, t)$ wirklich von t abhängen.

Wie könnte f aussehen? In ihrer Ruhelage ist die Saite eine Strecke; die einfachste Form einer Schwingung könnte darin bestehen, daß diese Strecke durch einen Teil einer Sinuslinie ersetzt wird. Da die Funktion an den Stellen 0 und L verschwinden muß und der Sinus bei allen ganzzahligen Vielfachen von π verschwindet, kommen daher Funktionen der Art

$$f(x, t) = A(t) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

in Frage, wobei $A(t)$ irgendeine Funktion der Zeit ist und k eine natürliche Zahl. Abbildung zwei zeigt die entsprechenden Funktionen für $k = 1$ bis 4 und $A(t) \equiv 1$.

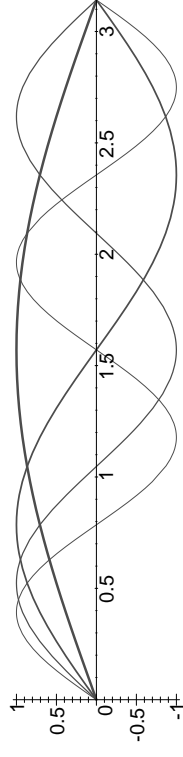


Abb. 2: Eine Schwingung mit Oberschwingungen

Bei einem realen Musikinstrument werden diese Oberschwingungen nicht alle dieselbe Amplitude haben; aus Kapitel I, §1f) etwa ist das Beispiel der *g*-Saite einer Geige bekannt, das hier noch einmal in Abbildung drei dargestellt ist: Die gestrichelte Kurve ist die Grundschwingung mit Amplitude eins, die fett eingezeichnete Kurve die Gesamtschwingung, und die sonstigen Kurven sind die reinen Teilschwingungen mit ihren jeweiligen Amplituden. (Wer selbst solche Kurven konstruieren und auch die dazugehörigen Töne hören möchte, findet ein Java-Applet unter <http://www.gac.edu/~huber/fourier/>)

Offensichtlich spielt die Grundschwingung kaum eine Rolle: Wie man sowohl hier als auch genauer an der Darstellung der Größenverhältnisse

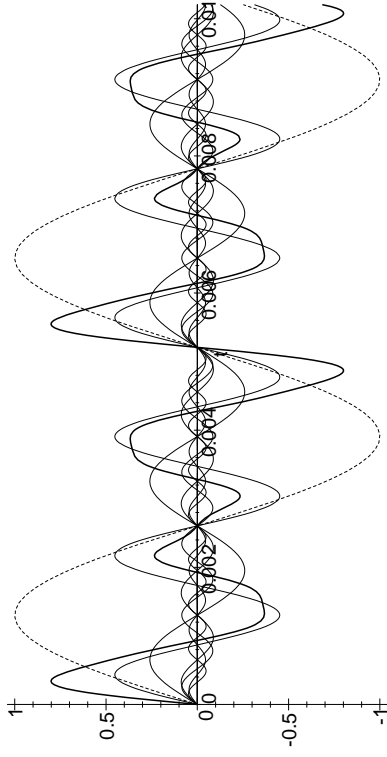


Abb. 3: Ton der g-Saite einer Geige und seine Komponenten

der Koeffizienten in Abbildung vier sieht, sind die Schwingungen mit doppelter und dreifacher Grundfrequenz am stärksten ausgeprägt, d.h. also die Oktave und vor allem die darüberliegende Quinte.

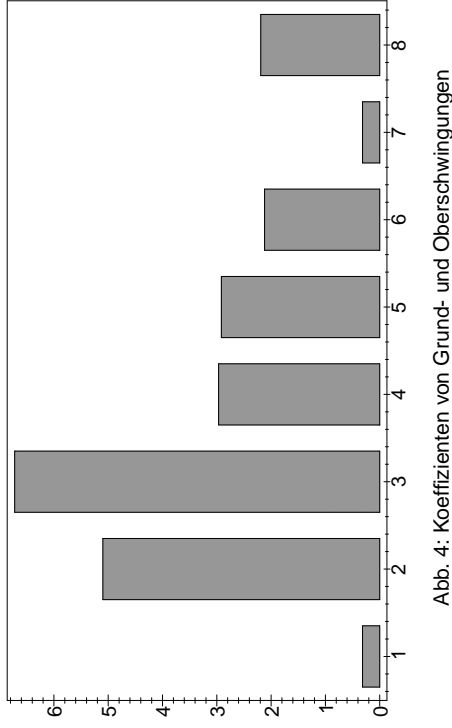


Abb. 4: Koeffizienten von Grund- und Oberschwingungen

Über die zeitabhängige Auslenkungsfunktion $A(t)$ wurde bislang noch

nichts gesagt; da wir periodische Schwingungen erwarten, liegt es nahe, auch hier einen Ansatz mit trigonometrischen Funktionen zu machen. Wenn wir die Zeitachse so festlegen, daß sich die Saite zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhelage befindet, ist der Sinus die geeignete Funktion; wir versuchen es daher für eine reine Schwingung mit einem Ansatz der Form

$$A(t) = a \cdot \sin \omega t,$$

wobei a und ω reelle Konstanten sind, von denen wir zumindest ω als positiv voraussetzen können. Insgesamt erwarten wir somit im einfachsten Fall Funktionen der Form

$$f(x, t) = a \cdot \sin \omega t \cdot \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right).$$

ω und k hängen natürlich voneinander ab: Wie jedermann aus Physik- und Musikunterricht weiß, führt ein doppelt so großer Wert von k zu einer doppelt so hohen Kreisfrequenz ω .

b) Die Differentialgleichung der schwingenden Saite

Wer sich allerdings kurz überlegt, *warum* dem so ist, wird wohl in den meisten Fällen nur auf den „Grund“ kommen, daß dies eben allgemein bekannt sei. Tatsächlich stecken dahinter einige nicht ganz triviale Überlegungen, die man für die Zwecke dieser Vorlesung zwar nicht unbedingt kennen muß, die aber für etwaige Interessenten trotzdem im Kleindruck beigelegt sind:

Da wir alles so einfach wie möglich halten wollen, gehen wir aus von einer Saite mit konstantem Querschnitt und konstanter Massendichte; letztere können wir dann beschreiben durch die Masse pro Längeneinheit, die für konkrete Saiten gemessen wird in Gramm pro Zentimeter oder Milligramm pro Zentimeter. Wir bezeichnen diese (lineare) Massendichte mit σ .

Die zweite wesentliche physikalische Größe für eine schwingende Saite ist deren *Spannung*. Auch hier beschränken wir uns wieder auf das einfachste physikalische Modell, in dem das HOOKEsche Gesetz gilt: Wir betrachten die Saite als eine elastische Feder, die eine natürliche Länge L_0 hat. Da sie aber in ein Musikinstrument eingespannt ist, wurde sie auf eine Länge $L > L_0$ gedehnt; nach dem HOOKEschen Gesetz wirkt somit eine Rückstellkraft $\lambda L / L_0$, die proportional ist zur Überdehnung L / L_0 mit der Federkonstanten λ als Proportionalitätsfaktor.

In der Ruhelage ist diese Rückstellkraft bedeutungslos: Da die Saite an beiden Enden fest eingespannt ist, kann sie ihre Länge nicht verringern. Anders wird es, wenn die Saite aus der Ruhelage entfernt wird: Dann hat die Federkraft in allen Punkten, an denen die (Tangente der) Saite nicht parallel zur x -Achse ist, auch eine Kraftkomponente in y -Richtung.

Die Lage der ausgelenkten Saite zu einem festen Zeitpunkt t wird beschrieben durch die Funktion

$$g(x) = f(x, t),$$

die die y -Koordinate des Punkts x angibt.

Betrachten wir das Saitenstück zwischen $x = x_1$ und $x = x_2$. Im Punkt x_1 habe die Tangente den Winkel α gegenüber der Horizontalen, im Punkt x_2 sei dieser Winkel β . Falls x_1 und x_2 einigermäÙen nahe beieinander liegen, können wir die Saite zwischen x_1 und x_2 in erster Näherung als eine Gerade betrachten. Diese Gerade sei um den Winkel γ gegenüber der Horizontalen geneigt; dann hat das Stück zwischen $x = x_1$ und $x = x_2$ die Länge

$$\frac{x_2 - x_1}{\cos \gamma},$$

denn der Kosinus eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck ist gleich Ankathete durch Hypothenuse. Gegenüber ihrer Ruhelage ist die ausgelenkte Saite daher noch um einen weiteren (lokalen) Faktor $1/\cos \gamma$ gestreckt.

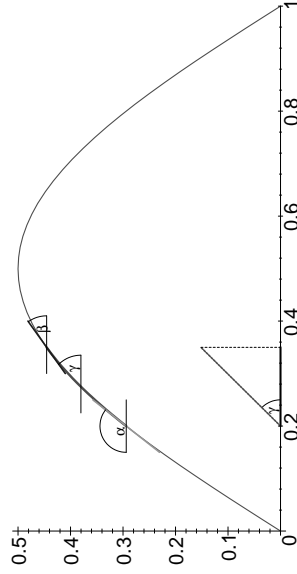


Abb. 5: Eine ausgelenkte Saite

Die Rückstellkraft in Richtung der *ausgelenkten Saite* ist daher gleich

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma},$$

und die Komponente in y -Richtung ist im Punkt x_1 gleich

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot \sin \alpha$$

und im Punkt x_2 entsprechend gleich

$$-\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot \sin \beta.$$

Da α und β bei gängigen Musikinstrumenten ziemlich klein sind, machen wir kein großen Fehler, wenn wir die Näherungsformeln

$$\sin x \approx x \approx \tan x$$

für im Bogenmaß gemessene Winkel x benutzen; demnach können wir also den Sinus in obigen Formeln ohne großen Genauigkeitsverlust durch einen Tangens ersetzen.

Der Tangens des Steigungswinkels der Tangenten des Graphs einer Funktion $y = g(x)$ gegenüber der Horizontalen ist gleich der Ableitung $g'(x)$, die Rückstellkräfte im Anfangs- und im Endpunkt des betrachteten Kurvenstücks sind also näherungsweise gleich

$$-\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot g'(x_1) \quad \text{und} \quad \lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot g'(x_2).$$

Bei einem hinreichend kleinen Saitenstück ist die resultierende Rückstellkraft gleich der Summe dieser beiden Komponenten, also

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot g'(x_2) - \lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot g'(x_1) = \lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot (g'(x_2) - g'(x_1)).$$

Da wir von sehr kleinen Winkeln γ ausgehen, liegt $\cos \gamma$ sehr nahe bei eins und kann, da wir hier ohnehin nur näherungsweise argumentieren, gleich eins gesetzt werden; die Rückstellkraft ist also näherungsweise gleich

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot (g'(x_2) - g'(x_1)).$$

Diese Kraft bedingt nach dem zweiten NEWTONSchen Gesetz eine Bewegung der Massenpunkte auf der Saite. Ein solcher Massenpunkt mit x -Koordinate x_0 hat eine zeitabhängige Auslenkung

$$h(t) = f(x_0, t),$$

und für die Kraft, die dies bewirkt, gilt nach dem zweiten NEWTONSchen Gesetz

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}.$$

Bei einem hinreichend kleinen Saitenstück können wir die Masse näherungsweise gleich der Masse,

$$m = \sigma \cdot (x_2 - x_1)$$

des gesamten Stück setzen. Die Beschleunigung ist gleich der zweiten Ableitung $\ddot{h}(t)$ der Auslenkung, also gilt insgesamt

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot (g'(x_2) - g'(x_1)) = \sigma \cdot (x_2 - x_1) \cdot \ddot{h}(t)$$

oder

$$g'(x_2) - g'(x_1) = \frac{\sigma L_0}{\lambda L} \ddot{h}(t).$$

Lassen wir nun x_2 und x_1 simultan gegen einen dazwischenliegenden Punkt x gehen, konvergiert die linke Seite gegen $g''(x)$, wir bekommen also die Gleichung

$$g''(x) = \frac{\sigma L_0}{\lambda L} \ddot{h}(t).$$

Damit sind wir fast fertig; wir müssen uns nur noch klarmachen, daß die beiden Funktionen $g(x)$ und $h(t)$ spezielle Werte der Funktion $f(x, t)$ berechnen: Für einen oben festgehaltenen (aber nicht weiter spezifizierten) Zeitpunkt t ist $g(x) = f(x, t)$, und für einen ebenfalls festgehaltenen (aber nicht weiter spezifizierten) Punkt x auf der Saite ist $h(t) = f(x, t)$. Daher ist

$$g''(x) = f_{xx}(x, t) \quad \text{und} \quad \ddot{h}(t) = f_{tt}(x, t),$$

und die Differentialgleichung der schwingenden Saite wird zu

$$f_{xx}(x, t) = \frac{\sigma L_0}{\lambda L} f_{tt}(x, t)$$

oder, wie man meist schreibt,

$$f_{tt}(x, t) = \frac{\lambda L}{\sigma L_0} f_{xx}(x, t).$$

Da es uns auf exakte Zahlenwerte nicht ankommt, wählen wir noch eine Abkürzung für den Bruch; da er positiv ist, können wir ihn als Quadrat schreiben und definieren

$$c^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda L}{\sigma L_0}.$$

Mit dieser neuen Bezeichnung wird die Differentialgleichung der schwingenden Saite zu

$$f_{tt}(x, t) = c^2 f_{xx}(x, t).$$

Sie allein legt $f(x, t)$ bei weitem noch nicht eindeutig fest: Sind φ und ψ irgendwelche zweifach stetig differenzierbare Funktionen einer Veränderlichen, so überzeugt man sich leicht (Kettenregel), daß

$$f(x, t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

eine Lösung dieser Gleichung ist, die sogenannte D'ALEMBERTSche Lösung. Sie zeigt, daß man die Konstante c interpretieren kann als Schallgeschwindigkeit *innerhalb der Saite*; die beiden Terme beschreiben Erregungen, die sich gegenläufig auf der Saite fortbewegen.

Wir waren oben ausgegangen von speziellen sinusförmigen Lösungen der Form

$$f(x, t) = A(t) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) = a \cdot \sin \omega t \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

und müssen nun sehen, für welche Parameterwerte dies Lösungen sind.

Die partiellen Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned} f_t(x, t) &= a\omega \cdot \cos \omega t \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \\ f_{tt}(x, t) &= -a\omega^2 \cdot \sin \omega t \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) = -\omega^2 f(x, t) \\ f_x(x, t) &= a \cdot \sin \omega t \cdot \left(\frac{k\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \\ f_{xx}(x, t) &= -a \cdot \sin \omega t \cdot \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 f(x, t), \end{aligned}$$

also ist

$$f_{tt}(x, t) = \left(\frac{k\pi}{\omega L}\right)^2 f_{xx}(x, t).$$

Die Differentialgleichung ist somit genau dann erfüllt, wenn

$$c = \frac{k\pi}{\omega L} \quad \text{oder} \quad \omega = k \cdot \frac{\pi}{cL}.$$

Wie diese Rechnung zeigt, wächst zumindest für die hier betrachteten einfachen Schwingungen die Frequenz in der Tat linear mit k , die Frequenzen der Obertöne sind also ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz.

c) Orthogonalitätsrelationen

Wie eingangs erwähnt, wollen wir in diesem Paragraphen (fast) beliebige periodische Funktionen durch Linearkombinationen von reinen Schwingungen beschreiben; bevor wir damit beginnen, müssen wir uns zunächst überlegen, welche Funktionen genau wir betrachten wollen.

Wir dürfen uns auf keinen Fall nur auf stetige Funktionen beschränken; Rechteckimpulse beispielsweise spielen eine sehr wichtige Rolle in der Informationstechnik. Andererseits wollen wir aber nicht soweit gehen, auch Funktionen wie

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{für rationale } t \\ \cos t & \text{für irrationale } t \end{cases}$$

zu betrachten, wir müssen also einen Kompromiss finden.

Definition: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oder $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *stetig*, wenn die Menge aller Unstetigkeitsstellen von f keine

Häufungspunkte hat und wenn für jede Unstetigkeitsstelle t_0 die links- und rechtsseitigen Limes

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t)$$

existieren.

Damit sind also Rechteckimpulse und allgemeiner alle Funktionen, die bis auf isolierte Sprungstellen stetig sind, stückweise stetig.

Auch periodische Funktionen sollten wir vorsichtshalber zumindest einmal formal definieren:

Definition: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oder $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *periodisch* zur Periode T , wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(t+T) = f(t).$$

Ist f periodisch zur Periode T , so offensichtlich auch zur Periode $2T$ oder $-5T$ usw.; falls es einen kleinsten positiven Wert T gibt, zu dem f periodisch ist, bezeichnen wir diesen als *die* Periode von f . In diesem Sinne haben also $\sin t$ und $\cos t$ die Periode 2π , wohingegen konstante Funktionen für jedes $T \in \mathbb{R}$ periodisch zur Periode T sind, so daß wir hier nicht von *der* Periode reden können.

Eine periodische Funktion ist eindeutig bestimmt durch ihre Werte in irgendeinem abgeschlossenen Intervall J der Länge T , denn für jedes $t \in \mathbb{R}$ gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, so daß $t - kT \in J$, und wegen der Periodizität muß $f(t) = f(t - kT)$ sein. Ein solches Intervall der Länge T bezeichnen wir kurz als ein *Periodenintervall*.

Da jede unendliche Menge in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ einen Häufungspunkt hat, kann eine stückweise stetige Funktion in jedem solchen Intervall höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen haben; insbesondere gibt es also bei einer stückweise stetigen periodischen Funktion in jedem Periodenintervall höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen, und durch diese sind *alle* Unstetigkeiten der Funktion festgelegt.

Wir betrachten im folgenden für jede reelle Zahl $T > 0$ die beiden Mengen

$$L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} f \text{ stückweise stetig und} \\ \text{periodisch zur Periode } T \end{array} \right. \right\}$$

und

$$L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \left| \begin{array}{l} f \text{ stückweise stetig und} \\ \text{periodisch zur Periode } T \end{array} \right. \right\}.$$

Da Linearkombinationen periodischer Funktionen zur selben Periode T wieder periodisch mit T sind und die Nullfunktion periodisch ist zu jeder Periode, ist $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ein \mathbb{R} -Vektorraum und $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ein \mathbb{C} -Vektorraum.

Da auch das Produkt zweier stückweise stetiger Funktionen stückweise stetig ist, existiert für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ das Integral

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt,$$

und das so definierte Produkt hat *fast* alle Eigenschaften eines Skalarprodukts: Symmetrie und Bilinearität sind klar, und da Quadrate in \mathbb{R} stets nichtnegativ sind, ist auch für alle $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$(f, f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt \geq 0.$$

Leider kann aber für eine nur stückweise stetige Funktion $(f, f) = 0$ sein, ohne daß f gleich der Nullfunktion wäre, beispielsweise für

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } t = kT \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Damit ist $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ kein EUKLIDISCHER Vektorraum; das gerade eingeführte Produkt wird uns aber trotzdem im folgenden sehr nützlich sein.

Entsprechend definieren wir auf $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ein Produkt durch

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt;$$

es hat alle Eigenschaften eines HERMITESCHEN Skalarprodukts *außer* der positiven Definitheit.

Fundamental für das weitere ist die folgende Orthogonalitätseigenschaft:

Lemma: Mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und $k, \ell \in \mathbb{Z}$ ist

$$(e^{ik\omega t}, e^{i\ell\omega t}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ 1 & \text{falls } k = \ell \end{cases}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} T \cdot (e^{ik\omega t}, e^{i\ell\omega t}) &= \int_0^T e^{ik\omega t} \overline{e^{i\ell\omega t}} dt = \int_0^T e^{ik\omega t} e^{-i\ell\omega t} dt \\ &= \int_0^T e^{i(k-\ell)\omega t} dt. \end{aligned}$$

Für $k = \ell$ integrieren wir hier die Konstante eins über ein Intervall der Länge T , das Integral ist also T . Für $k \neq \ell$ hat der Integrand die Stammfunktion

$$\frac{e^{i(k-\ell)\omega t}}{i(k-\ell)},$$

die wegen der Beziehung $\omega T = 2\pi$ periodisch ist mit Periode T ; das Integral verschwindet also. Division durch T liefert die Behauptung. ■

Zerlegen wir die komplexe Exponentialfunktion in Real- und Imaginärteil, erhalten wir die etwas umständlicheren entsprechenden Beziehungen für trigonometrische Funktionen. Da Kosinus eine gerade und Sinus eine ungerade Funktion ist, sind negative k und ℓ uninteressant; wir begnügen uns daher mit

Lemma: Mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\begin{aligned} (\cos k\omega t, \cos \ell\omega t) &= \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ 1/2 & \text{falls } k = \ell \neq 0, \\ 1 & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases}, \\ (\sin k\omega t, \sin \ell\omega t) &= \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ 1/2 & \text{falls } k = \ell \neq 0 \\ 0 & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases} \quad \text{und} \\ &(\cos k\omega t, \sin \ell\omega t) = 0. \end{aligned}$$

Beweis: Wir verwenden das gerade bewiesene Lemma; danach ist mit dem KRONECKER- δ ausgedrückt

$$\begin{aligned} \delta_{k\ell} &= (e^{ik\omega t}, e^{i\ell\omega t}) = (\cos k\omega t + i \sin k\omega t, \cos \ell\omega t + i \sin \ell\omega t) \\ &= (\cos k\omega t, \cos \ell\omega t) + (\sin k\omega t, \sin \ell\omega t) \\ &\quad + i(\sin k\omega t, \cos \ell\omega t) - i(\cos k\omega t, \sin \ell\omega t), \end{aligned}$$

also ist

$$(\cos k\omega t, \cos \ell\omega t) + (\sin k\omega t, \sin \ell\omega t) = \delta_{k\ell}$$

und

$$(\sin k\omega t, \cos \ell\omega t) - (\cos k\omega t, \sin \ell\omega t) = 0.$$

Diese Gleichungen gelten auch, wenn wir ℓ durch $-\ell$ ersetzen; sie werden dann zu

$$(\cos k\omega t, \cos \ell\omega t) - (\sin k\omega t, \sin \ell\omega t) = \delta_{k, -\ell}$$

und

$$(\sin k\omega t, \cos \ell\omega t) + (\cos k\omega t, \sin \ell\omega t) = 0.$$

Addiert bzw. subtrahiert man jeweils zwei der sich nur im Vorzeichen unterscheidenden Gleichungen, folgt, daß für $k, \ell \geq 0$

$$2(\cos k\omega t, \cos \ell\omega t) = \delta_{k\ell} + \delta_{k, -\ell} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell \\ 1 & \text{für } k = \ell \neq 0 \\ 2 & \text{für } k = \ell = 0 \end{cases}$$

ist und

$$2(\sin k\omega t, \sin \ell\omega t) = \delta_{k\ell} + \delta_{k, -\ell} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell \\ 1 & \text{für } k = \ell \neq 0 \\ 0 & \text{für } k = \ell = 0 \end{cases}$$

außerdem ist

$$(\sin k\omega t, \cos \ell\omega t) = (\cos k\omega t, \sin \ell\omega t) = 0.$$

Damit ist alles bewiesen. ■

Ein Leser, der noch nicht davon überzeugt ist, daß komplexe Zahlen und Funktionen auch im Reellen nützlich sind, sollte versuchen, dies rein reell zu beweisen: er muß also zeigen, daß

$$\int_0^T \cos k\omega t \cos \ell\omega t dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ T/2 & \text{falls } k = \ell \neq 0 \\ T & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases}$$

und

$$\int_0^T \sin k\omega t \sin \ell\omega t dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ T/2 & \text{falls } k = \ell \neq 0 \\ 0 & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases}$$

ist, sowie

$$\int_0^T \cos k\omega t \sin \ell\omega t dt = 0.$$

Eine ganze Reihe dieser Integrationen sind trivial, und *alle* sind rein reell durchführbar. Dennoch spart der Umweg übers Komplexe viel Zeit.

d) Harmonische Analyse trigonometrischer Polynome

Die Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$ bilden natürlich keine Basis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, genauso wenig wie die Funktionen $\cos k\omega t$ und $\sin \ell\omega t$ eine Basis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bilden: Basisdarstellungen sind schließlich stets *endliche* Linearkombinationen, und eine endliche Linearkombination von trigonometrischen oder Exponentialfunktionen ist insbesondere stetig.

Trotzdem ist es ganz nützlich, zur Demonstration der weiteren Vorgehensweise zunächst die Untervektorräume zu betrachten, die von diesen Funktionen erzeugt werden:

Definition: a) Der Vektorraum $P_T(\mathbb{C})$ aller komplexer trigonometrischer Polynome der Periode T ist der von den Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$ mit

$k \in \mathbb{Z}$ aufgespannte Untervektorraum von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

b) Der Vektorraum $P_T(\mathbb{R})$ aller reeller trigonometrischer Polynome der Periode T ist der von den Funktionen $\cos k\omega t$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und den Funktionen $\sin \ell\omega t$ mit $\ell \in \mathbb{N}$ aufgespannte Untervektorraum von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Die gerade bewiesenen Orthogonalitätsrelationen können wir dann auch so formulieren, daß die Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ eine Orthonormalbasis von $P_T(\mathbb{C})$ bilden, während die Funktionen $1, \sqrt{2} \cos k\omega t$ und $\sqrt{2} \sin \ell\omega t$ mit $k, \ell \in \mathbb{N}$ eine Orthonormalbasis von $P_T(\mathbb{R})$ bilden.

Zumindest für Funktionen aus $P_T(\mathbb{C})$ und $P_T(\mathbb{R})$ ist damit klar, wie man sie in reine Schwingungen zerlegen kann: Ist allgemein V ein EUKLIDISCHER oder HERMITESCHER Vektorraum und \mathcal{B} eine Orthonormalbasis von V , so läßt sich ein beliebiger Vektor $\vec{v} \in V$ gemäß

$$\vec{v} = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} (\vec{v}, \vec{b}) \vec{b}$$

als (endliche) Linearkombination der Basisvektoren ausdrücken.

Für $f \in P_T(\mathbb{C})$ ist somit

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{k i \omega t} \quad \text{mit} \quad c_k = (f(t), e^{k i \omega t}) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-k i \omega t} dt,$$

und für $f \in P_T(\mathbb{R})$ ist

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \sin \ell\omega t$$

mit

$$c_0 = (f(t), 1) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_k = \sqrt{2} \cdot (f(t), \sqrt{2} \cos k\omega t) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt$$

$$b_\ell = \sqrt{2} \cdot (f(t), \sqrt{2} \sin \ell\omega t) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \ell\omega t dt.$$

Die Summen in diesen Formeln sind natürlich nur formal unendlich; da ein trigonometrisches Polynom nach Definition *endliche* Linearkombination der Basisfunktionen ist, können in jeder dieser Summen höchstens endlich viele Summanden von Null verschieden sein.

Da die Formeln für reelle trigonometrische Polynome deutlich unangenehmer sind als die für komplexe, lohnt es sich oft, auch für reelle Funktionen den Umweg über das Komplexe zu gehen. Das ist immer möglich, denn auf Grund der EULERSchen Beziehungen ist jedes reelle trigonometrische Polynom gleichzeitig ein komplexes:

$$\begin{aligned} a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^M b_\ell \sin \ell\omega t &= a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \frac{e^{k-i\omega t} + e^{-k-i\omega t}}{2} + \sum_{\ell=1}^M b_\ell \frac{e^{\ell-i\omega t} e^{-i\omega t}}{2i} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{2} e^{k-i\omega t} + \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{2} e^{-k-i\omega t} - i \sum_{\ell=1}^M \frac{b_\ell}{2} e^{\ell-i\omega t} + i \sum_{\ell=1}^M \frac{b_\ell}{2} e^{-\ell-i\omega t} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^N \frac{a_k - ib_k}{2} e^{k-i\omega t} + \sum_{k=1}^N \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-k-i\omega t}. \end{aligned}$$

Schreibt man dies in der üblichen Weise als komplexes trigonometrisches Polynom $\sum c_k e^{k-i\omega t}$, ist also

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & \text{für } k > 0 \\ a_0 & \text{für } k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

Insbesondere sind c_k und c_{-k} für alle k komplex konjugiert zueinander; c_0 ist reell und somit zu sich selbst konjugiert. Aus obigen Formeln folgt auch, daß umgekehrt

$$a_k = 2 \Re c_k \quad \text{und} \quad b_\ell = -2 \Im c_\ell$$

ist; man kann also leicht zwischen reeller und komplexer Darstellung umrechnen.

Damit ist auch klar, daß $P_T(\mathbb{R}) = P_T(\mathbb{C}) \cap L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist; die reellen trigonometrischen Polynome sind also genau jene komplexe trigonometrische Polynome, die nur reelle Werte annehmen

Gefühlsmäßig würde man trigonometrische Polynome wohl nicht so definieren wie in diesem Abschnitt, sondern als Polynome in $\sin \omega t$ und $\cos \omega t$. Als kleine Anwendung obiger Überlegung folgt, daß dies in der Tat trigonometrische Polynome im Sinne der hiesigen Definition sind, denn wegen der EULERSchen Formel ist klar, daß es komplexe trigonometrische Polynome sind, und natürlich nehmen sie nur reelle Werte an.

e) Harmonische Analyse periodischer Funktionen

Die Bedingung, daß $f(t)$ als Summe endlich vieler reiner Schwingungen gegeben sein soll, schränkt die Brauchbarkeit obiger Resultate leider erheblich ein: Ein periodischer Rechteckimpuls etwa läßt sich so nicht behandeln.

Wir können aber jedes beliebige Element von $L_T^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Skalarprodukte $c_k = (f, e^{ik\omega t})$ berechnen und hoffen, daß sie für eine harmonische Analyse von f nützlich sind; wir definieren

Definition: Die FOURIER-Transformierte einer Funktion $f \in L_T^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist die Funktion

$$\hat{f}: \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \\ k \mapsto (f, e^{k-i\omega t}) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-k-i\omega t} dt. \end{cases}$$

(Man beachte, daß diese FOURIER-Transformierte einer *periodischen* Funktion nur auf \mathbb{Z} definiert ist: Periodische Funktionen haben kein kontinuierliches Frequenzspektrum, sondern nur Oberschwingungen zu ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz).



JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768–1830) begann zunächst mit einer Ausbildung zum Priester, beendete diese jedoch nicht, sondern wurde stattdessen Mathematiklehrer. 1793 trat er dem lokalen Revolutionskomitee bei, 1798 begleitete er Napoleon auf dessen Ägyptenfeldzug. Nach dem Rückzug aus Ägypten ernannte ihn dieser zum Präfekten von Isère; dort in Grenoble begann er mit seinen Arbeiten über Wärmeleitung, aus denen die FOURIER-Reihen hervorgingen. Nach Napoleons endgültiger Vertreibung wurde FOURIER 1817 in die Akademie der Wissenschaften gewählt; 1822 wurde er Sekretär der mathematischen Sektion.

Als *komplexe FOURIER-Reihe* von f bezeichnen wir die zunächst nur formale unendliche Summe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{-k \cdot i \omega t},$$

als *reelle FOURIER-Reihe* von $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ entsprechend

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k \omega t + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell} \sin \ell \omega t$$

mit c_0 , a_k und b_{ℓ} wie im vorigen Abschnitt.

Natürlich ist im Augenblick weder klar, ob diese Summen überhaupt existieren, d.h. also, ob die angegebenen Reihen für alle (oder zumindest fast alle) $t \in \mathbb{R}$ konvergieren, noch ist klar, ob sie dort, wo sie konvergieren, gegen den Funktionswert $f(t)$ konvergieren.

§ 3: Erste Beispiele von Fourier-Reihen

Bevor wir uns solchen allgemeinen Fragen zuwenden, wollen wir zunächst anhand einiger Beispiele sehen, was wir realistischerweise erwarten können.

a) Rechenregeln

Als erstes wollen wir uns überlegen, wie wir bei der Berechnung von FOURIER-Koeffizienten überflüssigen Rechenaufwand vermeiden können. ■

Das größte Potential für Vereinfachungen bieten *Symmetrien* der Funktionen. Die beiden wichtigsten Symmetrien sind die Eigenschaften, *gerade* oder *ungerade* zu sein: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gerade, wenn $f(-t) = f(t)$ ist für *alle* $t \in \mathbb{R}$; sie ist ungerade, wenn $f(-t) = -f(t)$ ist für *alle* $t \in \mathbb{R}$. Auch Symmetrien bezüglich anderer Punkte als $t = 0$ lassen sich gelegentlich erfolgreich ausnutzen.

A priori läßt sich keine Symmetrie bezüglich $t = 0$ für die Berechnung der hier interessierenden bestimmten Integrale mit Grenzen 0 und T ausnutzen; da wir es hier aber mit periodischen Funktionen zu tun haben, sind wir nicht an diese Integrationsgrenzen gebunden:

Lemma: Ist die Funktion g periodisch mit Periode T , so ist für jedes $\tau \in \mathbb{R}$

$$\int_0^T g(t) dt = \int_{\tau}^{\tau+T} g(t) dt.$$

Beweis: Wir können τ schreiben als

$$\tau = kT + \tau_0 \quad \text{mit } 0 \leq \tau_0 < T \quad \text{und } k \in \mathbb{Z}.$$

Wegen der Periodizität von f ist

$$\int_{\tau}^{\tau+T} g(t) dt = \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} g(t) dt;$$

es reicht also, den Fall $0 \leq \tau < T$ zu betrachten. Hierfür ist

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\tau+T} g(t) dt &= \int_{\tau}^T g(t) dt + \int_T^{\tau+T} g(t) dt = \int_{\tau}^T g(t) dt + \int_0^{\tau} g(t) dt \\ &= \int_0^{\tau} g(t) dt + \int_{\tau}^T g(t) dt = \int_0^T g(t) dt. \end{aligned}$$

Speziell für $\tau = -T/2$ ist also auch

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad \text{und} \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, und

$$b_\ell = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \ell\omega t dt \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}.$$

Ist nun f eine ungerade Funktion, so sind auch alle Funktionen $f(t) \cos k\omega t$ ungerade, d.h.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0 \quad \text{und} \quad a_k = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt = 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f(t) \sin \ell\omega t$ ist Produkt zweier ungerader Funktionen und somit gerade; dies liefert die Beziehung

$$b_\ell = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt,$$

die je nach der speziellen Form von f entweder nützlich ist oder auch nicht. Auf jeden Fall gibt es aber bei einer ungeraden Funktion in der FOURIER-Reihe keine Kosinusterme (einschließlich des konstanten Terms zu $\cos 0 = 1$); nur Sinusterme können von Null verschiedene Koeffizienten haben.

Für eine gerade Funktion f ist $f(t) \cdot \sin \ell\omega t$ als Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ungerade, d.h.

$$b_\ell = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \ell\omega t dt = 0$$

für alle ℓ . Somit sind keine Sinusterme möglich; nur Kosinusterme (einschließlich des konstanten Terms) können auftreten. Weiter ist

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt = 2 \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt,$$

was wiederum in Abhängigkeit von der speziellen Gestalt von f entweder nützlich ist oder auch nicht.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun endgültig zu konkreten Beispielen; das erste davon ist gerade in der Digitaltechnik von großer Bedeutung:

b) Periodische Rechteckimpulse

Hier betrachten wir die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} h & \text{für } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases} \quad \text{mit} \quad f(t+T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R};$$

offensichtlich ist $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Außerdem ist f eine ungerade Funktion, d.h. es gibt nur Sinusterme. Für diese ist

$$b_\ell = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \ell\omega t dt = \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} h \sin \ell\omega t dt - \int_{T/2}^T h \sin \ell\omega t dt \right),$$

aber wir können uns die Auswertung des zweiten Integrals sparen, wenn wir uns daran erinnern, daß für eine ungerade Funktion b_ℓ auch berechnet werden kann als $\frac{4}{T}$ mal dem Integral von Null bis zu rhalbem Periode. Somit ist

$$b_\ell = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} h \sin \ell\omega t dt = \frac{4h}{T} \left(-\frac{\cos \ell\omega \frac{T}{2} - 1}{\ell\omega} \right) = \frac{4h}{T} \left(\frac{(-1)^{\ell+1} + 1}{\ell\omega} \right),$$

denn wegen $\omega T = 2\pi$, ist $\omega T/2 = \pi$ und $\cos \ell\pi = (-1)^\ell$. Somit ist

$$b_\ell = \begin{cases} \frac{4h}{T} \cdot \frac{2}{\ell\omega} = \frac{4h}{\pi\ell} & \text{für gerade } \ell \\ 0 & \text{für ungerade } \ell \end{cases}$$

und

$$S_f(t) = \frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)}.$$

Wir sollten nicht zu optimistisch sein und erwarten, daß diese FOURIER-Reihe in jedem Punkt t gegen $f(t)$ konvergiert: Wir hätten einen Rechteckimpuls mit Periode T im Intervall $[0, T)$ beispielsweise auch durch

$$g(t) = \begin{cases} h & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

definieren können. $f(t)$ und $g(t)$ unterscheiden sich im Intervall $[0, T)$ nur an der Stelle $t = \frac{T}{2}$, was bei der Berechnung der Integrale für die FOURIER-Koeffizienten keine Rolle spielt. Die beiden Funktionen haben daher dieselbe FOURIER-Reihe, und diese kann, selbst wenn sie konvergiert, an der Stelle $t = \frac{T}{2}$ nicht sowohl gegen $f(\frac{T}{2}) = -h$ und $g(\frac{T}{2}) = h$ konvergieren. (Tatsächlich konvergiert sie, da $\omega \frac{T}{2} = \pi$ ist und der Sinus bei allen Vielfachen von π verschwindet, gegen Null, d.h. den Mittelwert der beiden Funktionswerte.)

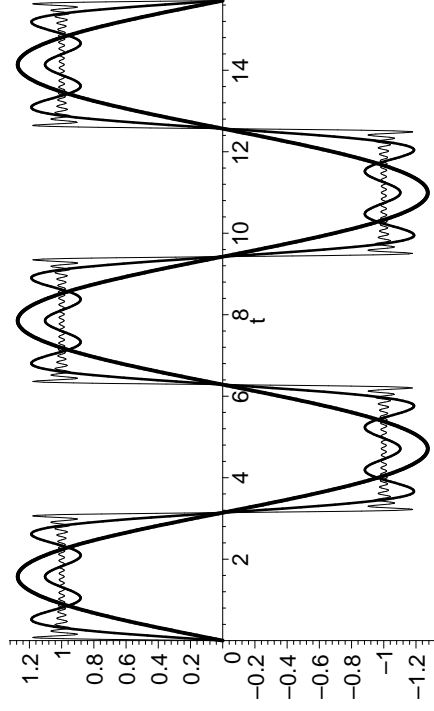


Abb. 6: FOURIER-Polynome für Rechteckimpulse

Experimentell konvergiert die berechnete Reihe abgesehen von den

Sprungstellen anscheinend recht gut: Abbildung sechs zeigt die Teilsommen mit oberen Grenzen 1, 3 und 20, die die Funktion f offensichtlich immer besser annähern. Gerade für die größeren Werte ist dieses Bild natürlich etwas gestört durch numerische Fehler und *alias*-Effekte der Rastergraphik; keine solche Störung sind allerdings die Überschwingungen an den Unstetigkeitsstellen von f : Dieses sogenannte GIBBS-Phänomen ist eine mathematisch unvermeidbare Eigenschaft von FOURIER-Reihen stückweise stetiger Funktionen, mit der wir uns in Kürze näher beschäftigen werden.

Im Augenblick sei nur kurz auf eine Anwendung dieser Überschwingungen hingewiesen: Die Pixel auf einem Computerbildschirm werden durch Rechteckimpulse geschaltet, wobei aus physikalischen Gründen Oberschwingungen hoher Frequenz bei der Übertragung so stark gedämpft werden, daß für alle praktischen Zwecke nur so etwas wie eine endliche Teilsumme der FOURIER-Reihe übertragen wird. Die in Abbildung sechs zu sehenden höherfrequenten Anteile lassen sich mit einem Funkempfänger auffangen und können dann zur Rekonstruktion des Bildschirminhalts verwendet werden; zumindest bei sensitiven Anwendungen muß ein Computer daher so abgeschirmt sein, daß von dieser Strahlung nichts aus dem Gehäuse dringt. Bei einem Standardgehäuse hat man hier nicht die geringste Chance; Computer im Hochsicherheitsbereich brauchen daher ihre eigenen Spezialgehäuse.

c) Sägezahnimpulse

Hier betrachten wir die Funktion

$$f(t) = \frac{T-t}{4} \quad \text{für } 0 < t < T \quad \text{und} \quad f(0) = 0,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T auf ganz \mathbb{R} .

Dies ist eine ungerade Funktion, denn für $0 < t < T$ ist

$$f(-t) = f(-t+T) = \frac{T}{4} - \frac{(-t+T)}{2} = \frac{t}{2} - \frac{T}{4} = -f(t),$$

und $f(0) = 0$, wie es sich für eine ungerade Funktion gehört. Die FOURIER-Reihe von f enthält daher nur Sinusterme.

Zu deren Berechnung setzen wir wie üblich

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

und erhalten den Koeffizienten von $\sin \ell\omega t$ als

$$\begin{aligned} b_\ell &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \ell\omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_0^T \left(\frac{T}{4} - \frac{t}{2} \right) \sin \ell\omega t \, dt \\ &= \frac{2}{T} \cdot \frac{T}{4} \int_0^T \sin \ell\omega t \, dt - \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{2} \int_0^T t \sin \ell\omega t \, dt \\ &= -\frac{1}{T} \int_0^T t \sin \ell\omega t \, dt, \end{aligned}$$

da das Integral einer Sinusfunktion über eine oder mehrere volle Perioden verschwindet. Zur weiteren Rechnung wenden wir die Methode der partiellen Integration an:

$$\int u(t) \cdot \dot{v}(t) \, dt = u(t) \cdot v(t) - \int \dot{u}(t) \cdot v(t) \, dt$$

ergibt für $u(t) = t$ und $\dot{v}(t) = \sin \ell\omega t$ mit $v = -\frac{1}{\ell\omega} \cos \ell\omega t$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \int t \sin \ell\omega t \, dt &= -t \frac{\cos \ell\omega t}{\ell\omega} + \frac{1}{\ell\omega} \int \cos \ell\omega t \, dt \\ &= -t \frac{\cos \ell\omega t}{\ell\omega} + \frac{1}{\ell^2\omega^2} \sin \ell\omega t + C. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} b_\ell &= -\frac{1}{T} \left(\frac{-T \cdot \cos \ell\omega T + 0 \cdot \cos 0}{\ell\omega} + \frac{\sin \ell\omega T - \sin 0}{\ell^2\omega^2} \right) \\ &= \frac{1}{\ell\omega} \cos(\ell \cdot 2\pi) = \frac{1}{\ell\omega} \end{aligned}$$

und

$$S_f(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega}.$$

Wieder haben wir keine Ahnung, ob und gegebenenfalls wohin diese Reihe konvergiert – außer bei den ganzzahligen Vielfachen von $T/2$, denn dort verschwinden alle Sinusfunktionen in den Zählern, so daß die Summe gleich null ist.

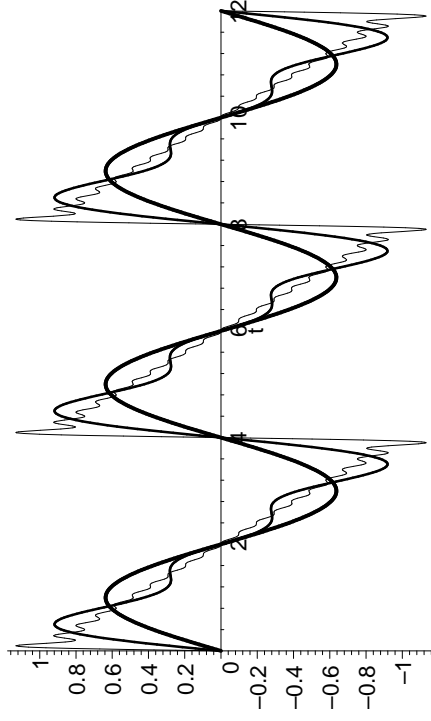


Abb. 7: FOURIERpolynome für die Sägezahnsschwingung

Abbildung 7 zeigt die Teilsummen mit 1, 3 und 20 Summanden für $T = 4$; anscheinend nähern diese die Funktion recht gut an, allerdings gibt es wieder Überschwüngen an den Sprungstellen, denn für $T = 4$ haben wir einen Sägezahn, der zwischen +1 und -1 hin- und herpendelt.

d) Der Sinus hyperbolicus

Als letztes Beispiel berechnen wir die FOURIER-Reihe von

$$f(t) = \sinh t \quad \text{für } -\pi < t \leq \pi, \text{ periodisch fortgesetzt mit Periode } 2\pi.$$

Die Koeffizienten der komplexen FOURIER-Reihe sind

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-k \cdot i\omega t} \, dt.$$

Man darf nun aber keineswegs den Fehler machen, daraus zu folgern, daß

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sinh t e^{-k \cdot i\omega t} dt$$

sei, denn $f(t)$ stimmt *nur* im Intervall $(-\pi, \pi]$ mit $\sinh t$ überein; für $\pi < t \leq 2\pi$ ist $f(t) = \sinh(t - 2\pi)$. Falls wir die mit Fragezeichen versehene Formel benutzen, berechnen wir tatsächlich die FOURIER-Reihe von

$g(t) = \sinh t$ für $0 < t \leq 2\pi$, periodisch fortgesetzt mit Periode 2π , und das ist, wie die Abbildungen acht und neun zeigen, eine völlig andere Funktion: f ist eine ungerade Funktion mit einem Wertebereich, der durch die beiden Extrema $\pm \sinh \pi \approx \pm 11,54873936$ begrenzt ist, g dagegen eine Funktion mit Werten zwischen null und $\sinh 2\pi \approx 267,7448943$, die weder gerade noch ungerade ist.

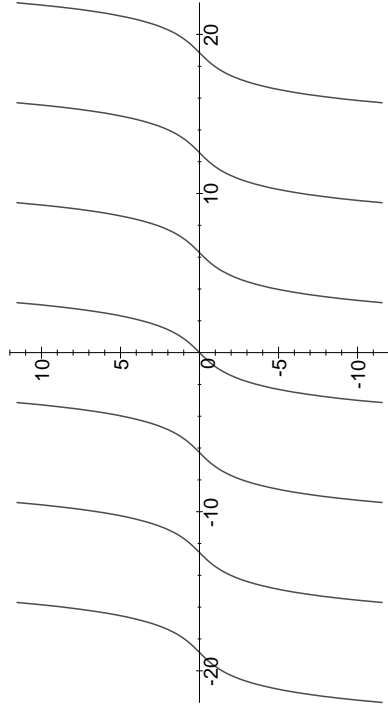


Abb. 8: Die Funktion $f(t)$

Wie groß der Unterschied zwischen den beiden Funktionen wirklich ist, sieht man am besten, wenn man sie wie in Abbildung zehn in einem

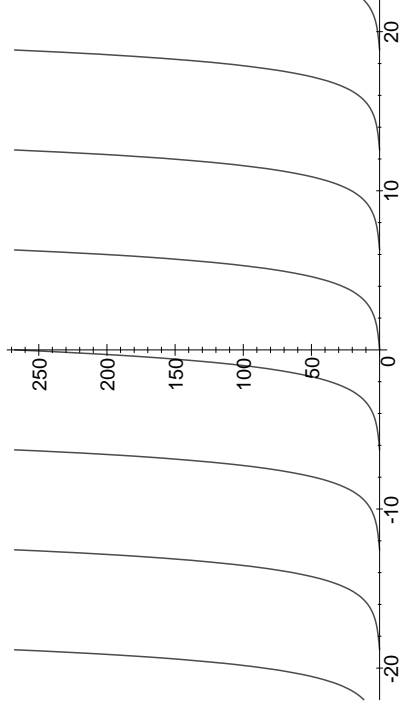


Abb. 9: Die Funktion $g(t)$

gemeinsamen Koordinatensystem abbildet: Die fett gezeichneten Kurvenstücke sind beiden Funktionen gemeinsam, und dort, wo f und g nicht übereinstimmen, ist f durch eine ausgezogene, g durch eine gestrichelte Kurve dargestellt.

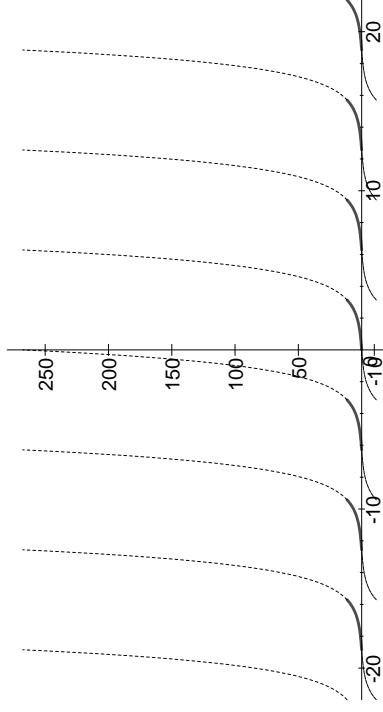


Abb. 10: $f(t)$ und $g(t)$ im gleichen Koordinatensystem

Wenn wir mit einer Integration von 0 bis 2π arbeiten wollen, müssen

wir also das Integral in zwei Teilintegrale aufteilen:

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-k \cdot it} dt = \int_0^{\pi} \sinh t e^{-k \cdot it} dt + \int_{\pi}^{2\pi} \sinh(t - 2\pi) e^{-k \cdot it} dt$$

Zum Glück wissen wir aber aus §3a), daß wir bei einer periodischen Form über jedes beliebige Periodenintervall integrieren dürfen, ohne etwas am Ergebnis zu verändern: Das wurde dort zwar nur für reelle Integrale gezeigt, aber da ein komplexes Integral auf zwei reelle zurückgeführt werden kann, gilt es auch dafür. Also ist auch

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-k \cdot it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t e^{-k \cdot it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^t - e^{-t}}{2} e^{-k \cdot it} dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{t(1-ki)} - e^{-t(1+ki)} \right) dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{t(1-ki)}}{1-ki} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{e^{-t(1+ki)}}{-(1+ki)} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{\pi} e^{-ki\pi} - e^{-\pi} e^{ki\pi}}{1-ki} + \frac{e^{-\pi} e^{-ki\pi} - e^{\pi} e^{ki\pi}}{1+ki} \right) \\ &= \frac{(-1)^k}{4\pi} (e^{\pi} - e^{-\pi}) \left(\frac{1}{1-ki} - \frac{1}{1+ki} \right) \\ &= \frac{(-1)^k \sinh \pi}{2\pi} \frac{(1+ki) - (1-ki)}{1+k^2} = \frac{\sinh \pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k \cdot ik}{k^2+1}. \end{aligned}$$

Die komplexe FOURIER-Reihe ist somit

$$S_f(t) = i \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1} e^{ikt}.$$

Da der Koeffizient von e^{ikt} eine ungerade Funktion von k ist, fallen beim Einsetzen von $e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$ die Kosinusterme weg, während

sich die Sinusterme zu k und zu $-k$ gegenseitig verdoppeln; wir erhalten also die reelle Form

$$S_f(t) = i \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1} i \sin kt = -2 \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1} \sin kt,$$

die gleichzeitig die reelle FOURIER-Reihe von f ist.

Bei der direkten Berechnung über die Koeffizientenformeln für die reelle Reihe wären die Vorüberlegungen aus §3a) ebenfalls nützlich gewesen: Da f eine ungerade Funktion ist, treten nur Sinusterme auf, und deren Koeffizienten sind

$$b_\ell = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t \sin \ell t dt.$$

Der Integrand hier ist in Exponentialform gleich

$$\frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^{i\ell t} - e^{-i\ell t}}{2i} = \frac{4i}{4i} \frac{e^{t(1+i\ell)} - e^{-t(1-i\ell)}}{4i} + \frac{4i}{4i} \frac{e^{-t(1-i\ell)} - e^{t(1+i\ell)}}{4i},$$

und die Stammfunktion des Summanden

$$\frac{e^{\pm t(1+i\ell)}}{4i} \quad \text{ist} \quad \frac{e^{\pm t(1+i\ell)}}{\pm 4i(1+i\ell)}.$$

Die Stammfunktion des Integranden ist daher

$$\begin{aligned} &\frac{e^{t(1+i\ell)}}{4i(1+i\ell)} - \frac{e^{-t(1-i\ell)}}{4i(1-i\ell)} - \frac{e^{-t(1-i\ell)}}{-4i(1-i\ell)} + \frac{e^{-t(1+i\ell)}}{-4i(1+i\ell)} \\ &= \frac{e^{t(1+i\ell)} - e^{-t(1+i\ell)}}{4i(1+i\ell)} - \frac{e^{t(1-i\ell)} - e^{-t(1-i\ell)}}{4i(1-i\ell)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d.h.} \quad b_\ell &= \frac{e^{t(1+i\ell)} - e^{-t(1+i\ell)}}{4\pi i(1+i\ell)} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{e^{t(1-i\ell)} - e^{-t(1-i\ell)}}{4\pi i(1-i\ell)} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{(e^{\pi(1+i\ell)} - e^{-\pi(1+i\ell)}) - (e^{-\pi(1+i\ell)} - e^{\pi(1+i\ell)})}{4\pi i(1+i\ell)} \\ &\quad - \frac{(e^{\pi(1-i\ell)} - e^{-\pi(1-i\ell)}) - (e^{-\pi(1-i\ell)} - e^{\pi(1-i\ell)})}{4\pi i(1-i\ell)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^\ell (e^\pi - e^{-\pi} - e^{-\pi} + e^\pi)}{4\pi i(1 + i\ell)} - \frac{(-1)^\ell (e^\pi - e^{-\pi} - e^{-\pi} + e^\pi)}{4\pi i(1 - i\ell)} \\
&= (-1)^\ell \left(\frac{\sinh \pi}{\pi i(1 + i\ell)} - \frac{\sinh \pi}{\pi i(1 - i\ell)} \right) \\
&= (-1)^\ell \frac{\sinh \pi}{\pi i} \left(\frac{1}{1 + i\ell} - \frac{1}{1 - i\ell} \right) \\
&= (-1)^\ell \frac{\sinh \pi}{\pi i} \frac{(1 - i\ell) - (1 + i\ell)}{1 + \ell^2} = (-1)^\ell \frac{\sinh \pi}{\pi} \frac{-2\ell}{\ell^2 + 1}.
\end{aligned}$$

Das sind, abgesehen von der anderen Bezeichnung für den Index, genau die oben berechneten Koeffizienten.

Wir können das Integral auch ganz ohne komplexe Zahlen ausrechnen: Zweimalige Anwendung der Regel für partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
b_\ell &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t \sin \ell t \, dt = \frac{1}{\pi} \cosh t \sin \ell t \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\ell}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh t \cos \ell t \, dt \\
&= -\frac{\ell}{\pi} \left(\sinh t \cos \ell t \Big|_{-\pi}^{\pi} + \ell \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t \sin \ell t \, dt \right) \\
&= -\frac{\ell}{\pi} \left((-1)^\ell \cdot 2 \sinh \pi + \ell \pi b_\ell \right) = -\frac{\ell}{\pi} (-1)^\ell \cdot 2 \sinh \pi - \ell^2 b_\ell.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$(1 + \ell^2) b_\ell = -\frac{2 \sinh \pi}{\pi} (-1)^\ell \ell \quad \text{und} \quad b_\ell = -\frac{2 \sinh \pi}{\pi} \frac{(-1)^\ell \ell}{\ell^2 + 1}.$$

Damit haben wir die FOURIER-Reihe von f auf drei verschiedene Weisen berechnet; das Ergebnis war natürlich in allen drei Fällen dasselbe, der Weg dorthin aber recht verschieden. Es hängt sowohl vom Problem als auch von persönlichen Vorlieben ab, welchen Rechengang man vorzieht; gerade bei Funktionen, bei denen die FOURIER-Reihe sowohl Sinus- als auch Kosinusterme enthält, wird aber oft der Weg über die komplexe FOURIER-Reihe am schnellsten sein, da man dann nur ein Integral berechnen muß.

e) Konvergenz der berechneten Reihen

Als nächstes wollen, zunächst für Sägezahnswingungen, die Konvergenz der FOURIER-Reihe untersuchen. Für $t = 0$ und damit auch für alle Vielfachen von T sind alle Summanden null, die Reihe konvergiert also gegen null.

Für t aus dem offenen Intervall $(0, T)$ können wir folgendermaßen vorgehen: Die Summanden $\frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}$ sind Stammfunktionen der Funktionen $\cos \ell \omega t$; also ist

$$\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} \quad \text{Stammfunktion von} \quad \sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega t.$$

Auch die Funktion f läßt sich im Intervall $(0, T)$ als Stammfunktion schreiben: Dort ist

$$f(t) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} = \int_{T/2}^t \left(\frac{-1}{2} \right) d\tau,$$

und da auch

$$\int_{T/2}^t \cos \ell \omega \tau \, d\tau = \frac{\sin \ell \omega t - \sin \ell \omega T/2}{\ell \omega} = \frac{\sin \ell \omega t - \sin \ell \pi}{\ell \omega} = \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}$$

ist, erhalten wir die Differenz zwischen der N -ten Teilsumme und $f(t)$ als Integral:

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} - f(t) &= \int_{T/2}^t \left(\sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega \tau - \left(\frac{-1}{2} \right) \right) d\tau \\
&= \int_{T/2}^t \left(\frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega \tau \right) d\tau.
\end{aligned}$$

Diesen Integranden können wir über die komplexe Darstellung des Kosinus ausrechnen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^N \cos \ell\omega\tau &= \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^N \frac{e^{\ell\cdot i\omega\tau} + e^{-\ell\cdot i\omega\tau}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=-N}^N e^{\ell\cdot i\omega\tau} \\ &= \frac{1}{2} e^{-N\cdot i\omega\tau} \sum_{\ell=0}^{2N} e^{\ell\cdot i\omega\tau} \end{aligned}$$

ist im wesentlichen eine geometrische Reihe, und die läßt sich bekanntlich leicht ausrechnen: Da

$$(1-q) \sum_{j=0}^r q^j = \sum_{j=0}^r q^j - \sum_{j=1}^{r+1} q^j = 1 - q^{r+1}$$

ist, folgt für $q \neq 1$ die Formel

$$\sum_{j=0}^r q^j = \frac{1 - q^{r+1}}{1 - q}.$$

In unserem Fall ist $q = e^{i\omega\tau}$ und somit

$$\sum_{\ell=0}^{2N} e^{\ell\cdot i\omega\tau} = \frac{1 - e^{(2N+1)\cdot i\omega\tau}}{1 - e^{i\omega\tau}}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^N \cos \ell\omega\tau &= \frac{1}{2} e^{-N\cdot i\omega\tau} \frac{1 - e^{(2N+1)\cdot i\omega\tau}}{1 - e^{i\omega\tau}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{-N\cdot i\omega\tau} - e^{(N+1)\cdot i\omega\tau}}{1 - e^{i\omega\tau}}. \end{aligned}$$

Erweiterung des Bruchs mit $e^{\frac{1}{2}\cdot i\omega\tau}$ führt auf die symmetrischere Form

$$\frac{1}{2} \frac{e^{-(N+\frac{1}{2})\cdot i\omega\tau} - e^{(N+\frac{1}{2})\cdot i\omega\tau}}{e^{-\frac{1}{2}\cdot i\omega\tau} - e^{\frac{1}{2}\cdot i\omega\tau}} = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\omega\tau}{2 \sin \frac{\omega\tau}{2}}.$$

Damit ist

$$\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} - f(t) = \int_{T/2}^t \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\omega\tau}{2 \sin \frac{\omega\tau}{2}} d\tau.$$

Die FOURIER-Reihe konvergiert genau dann im Punkt t gegen $f(t)$, wenn dieses Integral für $N \rightarrow \infty$ gegen null geht.

Die Suche nach einer Stammfunktion sieht ziemlich hoffnungslos aus; trotzdem hilft partielle Integration zu einem besseren Verständnis des Integrals. Wir wenden die Regel an mit

$$u(\tau) = \frac{1}{2 \sin \frac{\omega\tau}{2}} \quad \text{und} \quad \dot{v}(\tau) = \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega\tau,$$

d.h.

$$v(\tau) = -\frac{\cos(N + \frac{1}{2})\omega\tau}{(N + \frac{1}{2})\omega};$$

das Integral wird zu

$$-\frac{\cos(N + \frac{1}{2})\omega t}{(2N+1)\omega \sin \frac{\omega t}{2}} + \int_{T/2}^t \frac{\cos(N + \frac{1}{2})\omega\tau}{(N + \frac{1}{2})\omega} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2 \sin \frac{\omega\tau}{2}} \right) d\tau,$$

denn an der unteren Grenze ist

$$\cos\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega \frac{T}{2} = \cos\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi = 0.$$

Auf das noch verbleibende Integral wenden wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung in seiner allgemeinen Form an:

Für eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion v und eine in $[a, b]$ integrierbare Funktion w gibt es einen Wert $\zeta \in [a, b]$, so daß gilt

$$\int_a^b v(\tau)w(\tau) d\tau = v(\zeta) \int_a^b w(\tau) d\tau.$$

Für alle, die den Satz nicht in dieser Form kennen, sei der Beweis kurz nachgetragen: Als stetige Funktion nimmt v im Intervall $[a, b]$ sowohl seinen Maximalwert v_{\max} als auch seinen Minimalwert v_{\min} an. Der Wert des linksstehenden Integrals liegt dann zwischen

$$v_{\min} \int_a^b w(\tau) d\tau \quad \text{und} \quad v_{\max} \int_a^b w(\tau) d\tau,$$

es gibt also einen Wert $v_0 \in [v_{\min}, v_{\max}]$, so daß

$$\int_a^b v(\tau)w(\tau) d\tau = v_0 \int_a^b w(\tau) d\tau$$

ist. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt v als stetige Funktion diesen Wert v_0 irgendwo an, es gibt also ein $\zeta \in [a, b]$, so daß $v(\zeta) = v_0$ ist. Damit ist der Satz bewiesen. ■

Hier setzen wir

$$v(\tau) = \frac{\cos(N + \frac{1}{2})\omega\tau}{(N + \frac{1}{2})\omega} \quad \text{und} \quad w(\tau) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}} \right);$$

wir erhalten

$$\begin{aligned} & \int_{T/2}^t \frac{\cos(N + \frac{1}{2})\omega\tau}{(N + \frac{1}{2})\omega} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}} \right) d\tau \\ &= \frac{\cos(N + \frac{1}{2})\omega\zeta}{(2N + 1)\omega} \int_{T/2}^t \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\sin\frac{\omega\tau}{2}} \right) d\tau \\ &= \frac{\cos(N + \frac{1}{2})\omega\zeta}{(2N + 1)\omega} \left(\frac{1}{\sin\frac{\omega\zeta}{2}} - 1 \right), \end{aligned}$$

denn $\sin \frac{\omega T}{4} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. Also ist

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} - f(t) \\ &= -\frac{\cos(N + \frac{1}{2})\omega t}{(2N + 1)\omega \sin\frac{\omega t}{2}} + \frac{\cos(N + \frac{1}{2})\omega\zeta}{(2N + 1)\omega} \left(\frac{1}{\sin\frac{\omega\zeta}{2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Für $0 < t < T$ ist $1/\sin\frac{\omega t}{2} \geq 1$, also

$$0 \leq \frac{1}{\sin\frac{\omega t}{2}} - 1 < \frac{1}{\sin\frac{\omega t}{2}},$$

und da der Kosinus nur Werte zwischen -1 und $+1$ annimmt, folgt, daß

$$\left| \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} - f(t) \right| \leq \frac{2}{(2N + 1)\omega \sin\frac{\omega t}{2}}$$

für alle t mit $0 < t < T$.

Für $N \rightarrow \infty$ geht die rechte Seite gegen null, also ist

$$S_f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} = f(t)$$

für alle t mit $0 < t < T$. Für $t = 0$ stehen links und rechts Nullen, so daß die Gleichung auch dort gilt, und da beide Seiten periodisch sind mit Periode T , gilt sie tatsächlich für alle $t \in \mathbb{R}$.

Auf abgeschlossenen Teilintervallen von $(0, T)$ ist die Konvergenz sogar gleichmäßig, denn im Intervall $[\varepsilon, T - \varepsilon]$ ist $\sin\frac{\omega t}{2} \geq \sin\frac{\omega\varepsilon}{2}$, d.h.

$$\left| \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} - f(t) \right| \leq \frac{2}{(2N + 1)\omega \sin\frac{\omega\varepsilon}{2}}$$

für alle $t \in [\varepsilon, T - \varepsilon]$.

Mit diesem Resultat können wir nun auch die Konvergenz der FOURIER-Reihe für Rechteckimpulse genauer untersuchen:

Für $0 < t < \frac{T}{2}$ liegt auch $\frac{T}{2} - t$ im Intervall $(0, T)$, d.h. mit der gerade betrachteten Funktion f für Sägezahnimpulse ist

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} + \frac{T}{4} - \frac{t}{2} = \frac{T}{2}.$$

Für $\frac{T}{2} < t < T$ liegt $\frac{T}{2} - t$ im Intervall $(-T, 0)$, d.h. $\frac{3T}{2} - t$ liegt in $(0, T)$ und

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = f(t) + f\left(\frac{3T}{2} - t\right) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} + \frac{T}{4} - \frac{t}{2} = -\frac{T}{4}.$$

Für $t = 0$ sowie auch für $t = \frac{T}{2}$ ist $f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = 0$, insgesamt ist also

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \begin{cases} \frac{T}{4} & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -\frac{T}{4} & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2}, \end{cases}$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T . Somit beschreibt $f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right)$ einen Rechteckimpuls.

Da $S_f(t) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right)$$

und

$$\begin{aligned} S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell \omega \left(\frac{T}{2} - t\right)}{\ell \omega} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \left(\frac{\ell \omega T}{2} - \ell \omega t\right)}{\ell \omega} \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(\ell \pi - \ell \omega t)}{\ell \omega}. \end{aligned}$$

Für gerades ℓ ist

$$\sin(\ell \pi - x) = \sin(-x) = -\sin x$$

und für ungerades ℓ ist

$$\sin(\ell \pi - x) = \sin(\pi - x) = -\sin(x - \pi) = \sin x,$$

denn bei Verschiebung um π wird der $\sin x$ zu $-\sin x$. Damit folgt

$$S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}$$

und

$$S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} + \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}.$$

Für endliche Teilsummen heben sich bei dieser Addition einfach die Terme mit geraden Indizes weg, während die mit ungeradem Index

verdoppelt werden, d.h.

$$\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} + \sum_{\ell=1}^N (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} = 2 \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega}.$$

Durch Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ folgt

$$S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega},$$

d.h.

$$2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega} = \begin{cases} \frac{T}{4} & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -\frac{T}{4} & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Multiplikation beider Seiten mit $4h/T$ führt wegen

$$\frac{8h}{T\omega} = \frac{8h}{2\pi} = \frac{4h}{\pi}$$

zur Formel

$$\frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)} = \begin{cases} h & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Damit ist also auch die Konvergenz der FOURIER-Reihe der Rechteckschwingung geklärt. Als kleine Anwendung können wir den Wert $t = \frac{T}{4}$ einsetzen; für diesen ist

$$\sin(2\ell - 1)\omega \frac{T}{4} = \sin(2\ell - 1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{\ell+1},$$

d.h.

$$\frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell - 1)} = h$$

und somit

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell - 1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}.$$

f) Das Gibbs-Phänomen

Wie in den Abbildungen sechs und sieben zu sehen ist, zeigen zumindest die dort dargestellten FOURIER-Polynome Überschwüngen an den Sprungstellen. Wir wollen uns davon überzeugen, daß diese auch bei FOURIER-Polynome mit beliebig vielen Summanden nicht verschwinden.

Beginnen wir mit den Rechteckschwingungen! Wir versuchen zunächst, die Summe

$$S_N(t) = \frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)}$$

in etwas kompakterer Form darzustellen. Wegen

$$\frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega} = \int_0^t \cos(2\ell - 1)\omega\tau \, d\tau$$

ist

$$\frac{S_N(t)}{\omega} = \frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^N \int_0^t \cos(2\ell - 1)\omega\tau \, d\tau = \frac{4h}{\pi} \int_0^t \sum_{\ell=1}^N \cos(2\ell - 1)\omega\tau \, d\tau,$$

und diesen letzten Integranden können wir über seine komplexe Darstellung ausrechnen. Um den Nenner zwei zu eliminieren, berechnen wir den zweifachen Wert

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\ell=1}^N \cos(2\ell - 1)\omega\tau &= \sum_{\ell=1}^N (e^{(2\ell-1)i\omega\tau} + e^{-(2\ell-1)i\omega\tau}) \\ &= \sum_{\ell=-(N-1)}^{N-1} e^{(2\ell-1)i\omega\tau} = e^{(-2N+1)i\omega\tau} \sum_{\ell=0}^{2N-1} e^{2\ell i\omega\tau}. \end{aligned}$$

Letztere Summe ist eine geometrische Reihe mit Quotient $e^{2i\omega\tau}$; nach der Summenformel hat sie den Wert

$$\frac{1 - e^{4N i\omega\tau}}{1 - e^{2i\omega\tau}}.$$

Die gesuchte Summe ist also

$$\begin{aligned} e^{-2N i\omega\tau} \frac{1 - e^{4N i\omega\tau}}{1 - e^{2i\omega\tau}} &= \frac{e^{-2N i\omega\tau} (1 - e^{4N i\omega\tau})}{e^{-i\omega\tau} (1 - e^{2i\omega\tau})} \\ &= \frac{e^{-2N i\omega\tau} - e^{2N i\omega\tau}}{e^{-i\omega\tau} - e^{i\omega\tau}} = \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau} \end{aligned}$$

und

$$S_N = \frac{2h\omega}{\pi} \int_0^t \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau} \, d\tau.$$

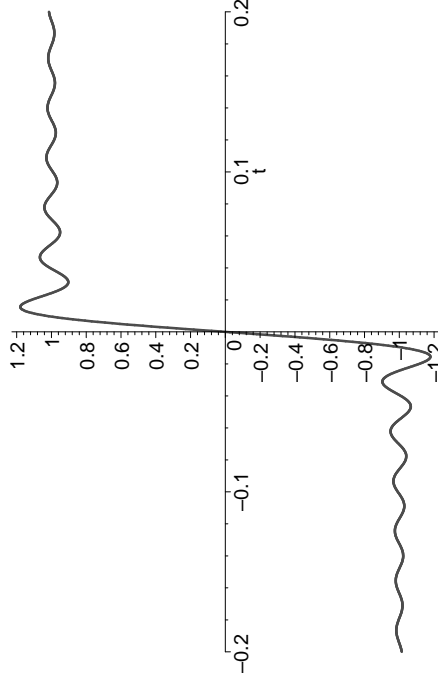


Abb. 11: Das Gibbsphänomen in Großaufnahme

Als nächstes suchen wir nach dem Betrag der Überschwüngen. Abbildung elf zeigt diese in Großaufnahme für $S_{100}(t)$; wir wollen das Maximum unmittelbar nach der Sprungstelle bestimmen und das Integral dort auswerten.

Im Maximum verschwindet die Ableitung des Integrals, also der Integrand

$$\frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau}.$$

Bei der ersten positiven Nullstelle t_N ist $2N\omega t_N = \pi$ die erste positive Nullstelle des Sinus, d.h.

$$t_N = \frac{\pi}{2N\omega}.$$

Insbesondere rückt t_0 mit wachsendem N immer näher zur Null; je größer N wird, desto enger lokalisiert wird die Überschwingung.

Mit der Substitution $u = 2N\omega\tau$ wird

$$S_N(t_N) = \frac{2h\omega}{\pi} \int_0^{t_N} \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau} d\tau = \frac{2h}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{2N \sin \frac{u}{2N}} du.$$

Für große Werte von N ist das Argument des Sinus im Nenner des Integranden sehr klein; wir machen also keinen großen Fehler, wenn wir den Sinus durch sein Argument annähern, und für $N \rightarrow \infty$ geht der Fehler gegen Null. Somit ist

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2h}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{2N \cdot \frac{u}{2N}} du = \frac{2h}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$

Die Stammfunktion von $\frac{\sin u}{u}$ ist nicht in geschlossener Form durch trigonometrische Funktionen, Logarithmen, Exponentialfunktionen und ähnliches ausdrückbar, sie ist aber sehr wichtig und hat daher einen eigenen Namen:

Definition: Die Funktion

$$\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du$$

heißt *Integralsinus* oder *sinus integralis*.

Der Integralsinus existiert für beliebige reelle Argumente t , denn die Nullstelle des Integranden bei $u = 0$ ist harmlos, da

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

ist. Wie Abbildung zwölf zeigt, konvergiert er für $t \rightarrow \pm\infty$ relativ schnell gegen einen konstanten Wert, den wir nach den Vorbereitungen

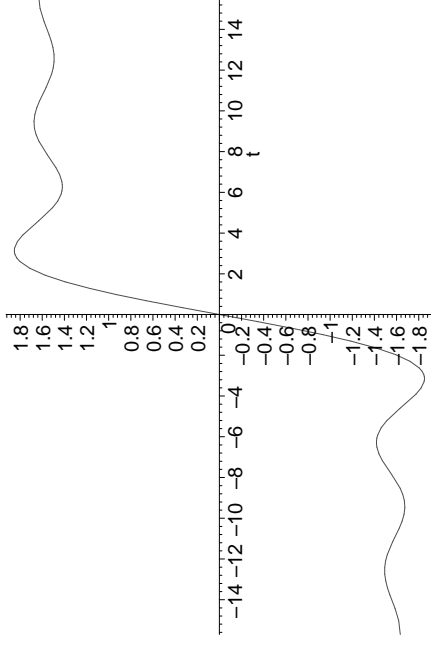


Abb. 12: Der Integralsinus

aus §1j) leicht bestimmen können: Wir wir dort mit Hilfe des Residuensatzes gesehen haben, ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \pi;$$

da der Integrand gerade ist, ist das Integral von Null bis unendlich die Hälfte davon, also $\pi/2$.

Der uns interessierende Wert des Integralsinus an der Stelle π läßt sich nicht in einfacher Weise durch bekannte Konstanten ausdrücken und muß daher numerisch berechnet werden; man erhält

$$\text{Si}(\pi) \approx 1,8519305198 \quad \text{und} \quad \frac{2h}{\pi} \text{Si}(\pi) \approx 1,1789797445 \cdot h.$$

Die FOURIER-Polynome überschwingen also auch für $N \rightarrow \infty$ den Funktionswert noch um knapp 18%.

Ersetzen wir die Funktion f durch $f+c$ für irgendeine Konstante c , ändert sich nur der konstante Term der FOURIER-Reihe; das GIBBS-Phänomen bleibt auch in seiner Größe unverändert. Verändert wird dagegen der Funktionswert; es ist daher besser, die Überschwingung auf die unverändert gebliebene Sprunghöhe zu beziehen. Wir sollten daher besser

sagen, daß die Überschwungung knapp neun Prozent der Sprunghöhe ausmacht.

Auch beim Sägezahn können wir die Überschwungung explizit berechnen: Aus Abschnitt e) wissen wir bereits, daß hier

$$\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} - f(t) = \int_{T/2}^t \frac{\sin(N + \frac{1}{2}) \omega \tau}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}} d\tau$$

ist. Auch die Ableitung dieser Funktion ist wieder der Integrand; für ihre erste positive Nullstelle t_N ist

$$\left(N + \frac{1}{2}\right) \omega t_N = \pi, \text{ d.h. } t_N = \frac{\pi}{(N + \frac{1}{2}) \omega} = \frac{T}{2N + 1}.$$

Mit der Substitution $u = (N + \frac{1}{2}) \omega \tau$ wird

$$\int_{T/2}^{t_N} \frac{\sin(N + \frac{1}{2}) \omega \tau}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}} d\tau = \int_{(N + \frac{1}{2})\pi}^{\pi} \frac{\sin u}{(2N + 1)\omega \sin \frac{u}{2N + 1}} du.$$

Wieder können wir den Sinus im Nenner für große N durch sein Argument ersetzen und erhalten somit als Limes für $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{(N + \frac{1}{2})\pi}^{\pi} \frac{\sin u}{\omega u} du &= \frac{1}{\omega} \left(\text{Si}(\pi) - \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Si}(t) \right) = \frac{\text{Si}(\pi) - \frac{\pi}{2}}{\omega} \\ &= \frac{T}{2\pi} \text{Si}(\pi) - \frac{T}{4}. \end{aligned}$$

Dabei ist $T/4$ der Wert, der überschungen wird, der Maximalwert des FOURIER-Polynoms geht also für $N \rightarrow \infty$ gegen $\frac{T}{2\pi} \text{Si}(\pi)$. Dividiert man dies durch $\frac{T}{4}$, ergibt sich wieder der Quotient

$$\frac{T}{2\pi} \text{Si}(\pi) \cdot \frac{4}{T} = \frac{2}{\pi} \text{Si}(\pi),$$

auch hier gibt es also wieder eine Überschwungung um knapp 18% des Funktionswerts oder knapp neun Prozent der Sprunghöhe.

Dies ist kein Zufall: Wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, tritt an *jeder* Unstetigkeitsstelle einer Funktion das GIBBS-Phänomen ein, wonach die FOURIER-Polynome den Sprung um knapp neun Prozent überschwingen.



JOSIAH WILLARD GIBBS (1839–1903) promovierte 1863 an der amerikanischen Yale-Universität mit einer Arbeit über Zahnradgetriebe; die erste amerikanische Dissertation auf dem Gebiet des Ingenieurwesens. Danach unterrichtete er in Yale Latein und Naturphilosophie, bis er 1866 nach Europa fuhr, wo er 1868/1869 in Heidelberg bei KIRCHHOFF und HELMHOLTZ studierte. 1871 wurde er in Yale Professor für mathematische Physik, 1873 publizierte er seine erste Arbeit, die sich, wie viele spätere, mit Thermodynamik befaßte. Sehr einflußreich waren auch seine Arbeiten zur elektromagnetischen Theorie des Lichts und zur Vektoranalysis.

g) Die Besselsche Ungleichung

In einem EUKLIDISCHEN oder HERMITESCHEN Vektorraum V mit (HERMITESCHEM) Skalarprodukt (\cdot, \cdot) gilt für jede Orthonormalbasis \mathcal{B} , daß für zwei Vektoren

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \lambda_{\vec{b}} \vec{b} & \text{und} & & \vec{w} &= \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \mu_{\vec{b}} \vec{b} \end{aligned}$$

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \lambda_{\vec{b}} \mu_{\vec{b}},$$

das Skalarprodukt berechnet werden kann als

wobei wegen der Basisseigenschaft von \mathcal{B} natürlich wieder alle Summen endlich sind, auch wenn die Basis \mathcal{B} unendlich sein sollte. Insbesondere ist

$$(\vec{v}, \vec{v}) = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \lambda_{\vec{b}} \lambda_{\vec{b}} = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} |\lambda_{\vec{b}}|^2.$$

Für trigonometrische Polynome

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{k \cdot i \omega t} \in \mathbf{P}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

ist daher $(f, f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$, wobei auch hier wieder, da es sich um ein trigonometrisches *Polynom* handelt, in beiden unendlichen Summen nur endlich viele Summanden ungleich null sind.

$L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist zwar kein EUKLIDISCHER Vektorraum und $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ kein HERMITESCHER, aber wir hoffen doch, daß sich die trigonometrischen Funktionen bz.w. komplexen Exponentialfunktionen wenigstens so ähnlich verhalten wie eine Orthonormalbasis; vielleicht sollte auch gelten, daß für eine Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit FOURIER-Reihe

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{k \cdot i \omega t} \quad \text{gilt} \quad (f, f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2,$$

obwohl *hier* wirklich unendliche Summen stehen können.

Bei der Untersuchung der Konvergenz von FOURIER-Reihen wird diese Frage eine wesentliche Rolle spielen; als ersten Einstieg dazu beweisen wir die BESSELSche Ungleichung:

Lemma: Für die FOURIER-Koeffizienten $c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-k \cdot i \omega t} dt$ einer Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{c_k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{f(t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt;$$

insbesondere konvergiert die linke Summe also.

Beweis: Die rechte Seite der Ungleichung ist gerade das HERMITESCHE Produkt (f, f) , und auch die FOURIER-Koeffizienten lassen sich als Produkte

$$c_k = (f, e^{k \cdot i \omega t})$$

schreiben. Wir wollen noch einige weitere Produkte ausrechnen.

Zunächst definieren wir die Teilsumme

$$S_N(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-N}^N c_k e^{k \cdot i \omega t}.$$

Dies ist ein trigonometrisches Polynom, und wir wissen daher schon aus §2a), daß

$$(S_N, S_N) = \sum_{k=-N}^N |c_k|^2$$

ist.

Als nächstes betrachten wir das Produkt

$$(f - S_N, f - S_N) = (f, f) - (S_N, f) - (f, S_N) + (S_N, S_N).$$

Auch wenn das HERMITESCHE Produkt auf $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ nicht positiv definit ist, wissen wir doch, daß die linke (und damit auch die rechte) Seite zumindest nichtnegativ ist.

Wegen der Linearität des HERMITESCHEN Produkts im ersten Argument ist weiter

$$\begin{aligned} (S_N, f) &= \left(\sum_{k=-N}^N c_k e^{k \cdot i \omega t}, f \right) = \sum_{k=-N}^N c_k (e^{k \cdot i \omega t}, f) \\ &= \sum_{k=-N}^N c_k \overline{(f, e^{k \cdot i \omega t})} = \sum_{k=-N}^N c_k \overline{c_k} = \sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \\ &= (S_N, S_N), \end{aligned}$$

und da dies eine reelle Zahl ist, folgt auch

$$(f, S_N) = \overline{(S_N, f)} = (S_N, f) = (S_N, S_N).$$

Fassen wir alles zusammen, ist also

$$0 \leq (f - S_N, f - S_N) = (f, f) - (S_N, S_N)$$

und damit

$$(S_N, S_N) \leq (f, f) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Ausgeschrieben wird das zu

$$\sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und der Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ führt zur gewünschten Ungleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt,$$

wie behauptet.



FRIEDRICH WILHELM BESSEL (1784–1846) verließ die Schule schon im Alter von 14 Jahren und wurde Lehrling eines Handelshauses. Dessen Überseehandel veranlaßte ihn zur Beschäftigung mit Geographie, Spanisch und Englisch und schließlich (für die Navigation) mit Astronomie. Nachdem er 1804 die Bahn des HALLEYSchen Kometen berechnet hatte, bekam er 1806 eine Stelle als Astronom eines privaten Observatoriums. Seine Beiträge zur Mathematik entstanden aus seinen astronomischen Berechnungen. 1809 wurde er zum Direktor des Königsberger Observatoriums und zum Professor der Astronomie ernannt.

Aufgrund der Beziehungen zwischen reellen und komplexen FOURIER-Reihen (für die genau dieselben Formeln gelten, die wir in Abschnitt d) für trigonometrische Polynome hergeleitet haben) folgt, daß für die reelle FOURIER-Reihe einer reellwertigen Funktion gilt

$$|a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \leq \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt.$$

Insbesondere konvergieren also auch die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell}^2.$$

h) Harmonische Analyse als lineare Abbildung

Die BESSELSche Ungleichung zeigt, daß nicht alle Folgen reeller oder komplexer Zahlen als FOURIER-Koeffizienten eine stückweise stetigen Funktion auftreten können: Zumindest muß die Summe ihrer Betragsquadrate konvergieren, d.h. die $c: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $c(k) = c_k$, die jedem $k \in \mathbb{Z}$

den FOURIER-Koeffizienten c_k zuordnet, liegt im Vektorraum

$$\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ c: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c(k)|^2 < \infty \right\}.$$

Um den Zusammenhang zwischen Funktionen und Koeffizientenfolgen besser zu verstehen, definieren wir für $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Funktion

$$\hat{f}: \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \\ k \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-k \cdot i \omega t} dt \end{cases};$$

$\hat{f}(k)$ ist also gerade der k -te FOURIER-Koeffizient von f .

Lemma: Die Zuordnung $f \mapsto \hat{f}$ definiert eine lineare Abbildung von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ nach $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

Der Beweis ist trivial wegen der Linearität der Integration. ■

Als nächstes definieren wir auf $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ ein HERMITESCHES Skalarprodukt durch die Vorschrift

$$(c, d) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k}.$$

Wir müssen zeigen, daß dies erstens wohldefiniert ist, daß die Summe also überhaupt konvergiert, und daß es zweitens alle Forderungen an ein HERMITESCHES Skalarprodukt erfüllt.

Da für zwei komplexe Zahlen z und w ist $(|z| - |w|)^2 \geq 0$, also

$$|zw| = |z\overline{w}| \leq \frac{1}{2} (|z|^2 + |w|^2).$$

Für zwei Funktionen $c, d \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ ist daher für jede natürliche Zahl N

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=-N}^N c(k) \overline{d(k)} \right| &\leq \sum_{k=-N}^N |c(k) \overline{d(k)}| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\sum_{k=-N}^N |c(k)|^2 + \sum_{k=-N}^N |d(k)|^2 \right). \end{aligned}$$

Nach Definition von $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ konvergiert die rechte Seite für $N \rightarrow \infty$, also auch die linke.

Das Nachrechnen der Forderungen an ein HERMITESCHES Skalarprodukt ist nun einfach: Abgesehen von der Tatsache, daß die Summen nicht mehr endlich sind, geht alles ganz genauso wie beim HERMITESCHEN Standardskalarprodukt auf \mathbb{C}^n .

Mit diesem Skalarprodukt ausgedrückt bekommt die BESSELSche Ungleichung die kompakte Form

$$(\widehat{f}, \widehat{f}) \leq (f, f) \quad \text{für alle } f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

§4: Periodische Faltungen

Abgesehen von den beiden Beispielen der Rechteckschwingung und des Sägezahns wissen wir bislang noch von keiner FOURIER-Reihe, ob und gegebenenfalls wohin sie konvergiert. In diesem Paragraphen soll dies zumindest für stückweise differenzierbare Funktionen geklärt werden. Als zentral wird sich dabei eine neue Konstruktion herausstellen, die *Faltung zweier Funktionen*.

a) Faltungen

Definition: Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ bezeichnen wir die Funktion

$$f \star g(t) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t - \tau)g(\tau) d\tau$$

als (periodische) Faltung von f und g .

Anschaulich kann man sich die Faltung als eine Art Mittelung von f vorstellen mit einer Gewichtsfunktion g . Im zweidimensionalen (nicht-periodischen) Analogon kann man beispielsweise ein optisch defokussiertes Bild so beschreiben: Bei einer perfekten optischen Abbildung einer Ebene hängt jeder Bildpunkt von genau einem Punkt der Ebenen ab; ist das System aber defokussiert, so kommen auch noch Einflüsse

der Nachbarpunkte dazu, die umso größer sind, je näher die Punkte beieinanderliegen. Eine Helligkeitsverteilung $f(s, t)$ wird dann abgebildet auf

$$F(s, t) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{(s-\sigma)^2 + (t-\tau)^2 / 2a} f(\sigma, \tau) d\sigma d\tau,$$

wobei der Parameter a umso größer ist, je stärker das Bild defokussiert ist. Für kleines a ist der Effekt also eher ein Weichzeichnen als eine echte Unschärfe, und dieser Glättungseffekt ist ein allgemeines Charakteristikum von Faltungen:

Lemma: Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $f \star g$ eine stetige Funktion.

(Man beachte, daß f und g beide nur als stückweise stetig vorausgesetzt sind!)

Beweis: Als stückweise stetige periodische Funktion ist g insbesondere beschränkt: Für jedes offene Intervall (t_j, t_{j+1}) , in dem f stetig ist, müssen nach Definition der stückweisen Stetigkeit der rechtsseitigen Grenzwert $\lim_{t \rightarrow t_j^+} g(t)$ und der linksseitige Grenzwert $\lim_{t \rightarrow t_{j+1}^-} g(t)$ existieren; damit kann die Einschränkung von g auf das offene Intervall (t_j, t_{j+1}) fortgesetzt werden zu einer stetigen Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[t_j, t_{j+1}]$ (die an den Intervallenden natürlich nicht mit g übereinstimmen muß). Damit hat der Betrag dieser Funktion ein endliches Maximum M_j , das auch eine Schranke für g im offenen Intervall (t_j, t_{j+1}) ist. Nimmt man nun als M das Maximum aller M_j sowie auch der Beträge $|g(t_j)|$ der Funktionswerte an den potentiellen Sprungstellen, so ist $|g(t)| \leq M$ für alle $t \in [0, T]$ und damit auch für alle $t \in \mathbb{R}$.

Seien nun t_1 und t_2 Punkte aus \mathbb{R} ; dann ist

$$\begin{aligned} |f \star g(t_1) - f \star g(t_2)| &\leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t_1 - \tau) - f(t_2 - \tau)| |g(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{M}{T} \int_0^T |f(t_1 - \tau) - f(t_2 - \tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Das noch verbliebene Integral mißt die Fläche zwischen den Graphen von $f(t)$ und $f(t+t_2-t_1)$ über eine Periode von f ; wegen der stückweisen Stetigkeit von f geht diese gegen null für $t_2 \rightarrow t_1$. ■

b) Die Fourier-Reihe einer Faltung

Die Nützlichkeit von Faltungen für FOURIER-Reihen ergibt sich aus folgender Formel:

Satz: Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist

$$\widehat{f \star g}(k) = \widehat{f}(k) \cdot \widehat{g}(k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z};$$

die komplexen FOURIER-Koeffizienten von $f \star g$ sind also gerade die Produkte der komplexen FOURIER-Koeffizienten von f und von g .

Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen: Der k -te FOURIER-Koeffizient c_k von $f \star g$ ist

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f \star g(t) e^{-k \cdot i \omega t} dt = \frac{1}{T^2} \int_0^T \left(\int_0^T f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right) e^{-k \cdot i \omega t} dt \\ &= \frac{1}{T^2} \iint_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 \leq \tau \leq T}} f(t-\tau) g(\tau) e^{-k \cdot i \omega t} d\tau dt \\ &= \frac{1}{T^2} \iint_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 \leq \tau \leq T}} f(t-\tau) e^{-k \cdot i \omega(t-\tau)} \cdot g(\tau) e^{-k \cdot i \omega \tau} dt d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t-\tau) e^{-k \cdot i \omega(t-\tau)} dt \right) g(\tau) e^{-k \cdot i \omega \tau} d\tau. \end{aligned}$$

Der Inhalt der letzten Klammer kann mit Hilfe der Substitution $u = t - \tau$ im Integral berechnet werden:

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t-\tau) e^{-k \cdot i \omega(t-\tau)} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau}^{T-\tau} f(u) e^{-k \cdot i \omega u} du = \widehat{f}(k),$$

denn wie wir uns schon überlegt haben, kommt es bei einer periodischen Funktion nicht darauf an, über welches Intervall der Länge T wir integrieren. Somit ist

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T \widehat{f}(k) \cdot g(\tau) e^{-k \cdot i \omega \tau} d\tau = \widehat{f}(k) \cdot \widehat{g}(k),$$

wie behauptet. ■

Sind $S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{k \cdot i \omega t}$ und $S_g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{k \cdot i \omega t}$ die FOURIER-Reihen von f und g , ist die FOURIER-Reihe von $f \star g$ somit

$$S_{f \star g}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_k e^{k \cdot i \omega t}.$$

Nach der BESSELSEN Ungleichung konvergieren die Summen

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |d_k|^2;$$

außerdem ist für jedes k

$$|c_k d_k| \leq \frac{1}{2} (|c_k|^2 + |d_k|^2);$$

also konvergiert auch

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k d_k| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k d_k e^{k \cdot i \omega t}|.$$

(Man beachte, daß $|e^{k \cdot i \omega t}| = 1$ ist für jede reelle Zahl t .) Damit haben wir gezeigt, daß die FOURIER-Reihe von $f \star g$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

Das hat eine wichtige Konsequenz:

Lemma: Konvergiert die FOURIER-Reihe einer Funktion h gleichmäßig gegen eine Funktion S_h , so ist S_h stetig und hat dieselben FOURIER-Koeffizienten wie h .

Beweis: Die FOURIER-Reihe von h sei

$$S_h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{k \cdot i \omega t}.$$

Da alle Summanden $c_k e^{k \cdot i \omega t}$ stetige Funktionen sind, ist wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe auch die Summe eine stetige Funktion; deren k -ter FOURIER-Koeffizient ist

$$\widehat{S}_h(k) = (S_h, e^{k \cdot i \omega t}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell=-N}^N c_\ell (e^{\ell \cdot i \omega t}, e^{k \cdot i \omega t}) = c_k,$$

wie behauptet. ■

Insgesamt haben wir damit bewiesen

Satz: Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert die FOURIER-Reihe von $f \star g$ absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion. Diese hat dieselben FOURIER-Koeffizienten wie $f \star g$. ■

Damit wissen wir zwar immer noch nicht, *wohin* die FOURIER-Reihe von $f \star g$ konvergiert, aber wir wissen immerhin, *daß* sie für Funktionen, die als Faltungen darstellbar sind, konvergiert, und wir wissen auch, daß für die Differenz zwischen Ausgangs- und Grenzfunktion sämtliche FOURIER-Koeffizienten verschwinden. Wir müssen daher einerseits Funktionen mit verschwindenden FOURIER-Koeffizienten genauer untersuchen und andererseits versuchen, eine möglichst große Klasse von Funktionen als Faltungen darzustellen, auf die wir den gerade bewiesenen Satz anwenden können.

c) Faltung mit einem Sägezahn

Als erstes konkretes Beispiel (von dem sich zeigen wird, daß es zumindest einen Teil der zweiten Aufgabe lösen wird) betrachten wir für eine beliebige Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Faltung mit dem Sägezahn

$$s(t) = \frac{T}{2} - t \quad \text{für } 0 < t < T \quad \text{und} \quad s(0) = 0,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T : es handelt sich hier um das Zweifache der in §2c) betrachteten Funktion.

Für $t, \tau \in [0, T)$ liegt $t - \tau$ genau dann wieder in $[0, T)$, wenn $\tau \leq t$ ist; andernfalls liegt $t - \tau$ im Intervall $(-T, 0)$, wo

$$s(t) = s(t + T) = \frac{T}{2} - (t + T) = -\frac{T}{2} - t$$

ist. Somit ist für $t, \tau \in (0, T)$

$$s(t - \tau) = \begin{cases} \frac{T}{2} - t + \tau & \text{für } \tau < t \\ 0 & \text{für } \tau = t \\ -\frac{T}{2} - t + \tau & \text{für } \tau > t \end{cases}$$

und $s \star f(t)$ ist gleich

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T s(t - \tau) f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_0^t \left(\frac{T}{2} - (t - \tau) \right) f(\tau) d\tau + \frac{1}{T} \int_t^T \left(-\frac{T}{2} - (t - \tau) \right) f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} \int_0^t f(\tau) d\tau - \frac{T}{2} \int_0^T f(\tau) d\tau + \int_0^t (\tau - t) f(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^t f(\tau) d\tau - \int_t^T f(\tau) d\tau \right) + \frac{1}{T} \int_0^t (\tau - t) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Ist $F(t)$ eine Stammfunktion von $f(t)$, so ist der erste Summand gleich

$$\frac{1}{2} (F(t) - F(0) - F(T) + F(t)) = F(t) - \frac{F(0) + F(T)}{2}.$$

Auch das letzte Integral läßt sich durch partielle Integration weiter aus-

rechnen zu

$$\begin{aligned} \int_0^T (\tau - t)f(\tau) d\tau &= (\tau - t)F(\tau) \Big|_0^T - \int_0^T F(\tau) d\tau \\ &= (T - t)F(T) + tF(0) - \int_0^T F(\tau) d\tau \\ &= t(F(0) - F(T)) + TF(T) - \int_0^T F(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Insgesamt ist also

$$s * f(t) = F(t) + t(F(0) - F(T)) - \frac{F(0) + F(T)}{2} + TF(T) - \int_0^T F(\tau) d\tau.$$

Abgesehen von dem Term $t(F(0) - F(T))$ ist das eine Stammfunktion von $f(t)$, denn die drei hinteren Terme sind Konstanten, die nicht von t abhängen. Ist also insbesondere $F(T) = F(0)$, so ist $s * f$ eine Stammfunktion von f . Dies wollen wir ausnutzen, um differenzierbare Funktionen sowie eine leichte Verallgemeinerung davon als Faltungen auszudrücken und so die Konvergenz ihrer FOURIER-Reihen zu beweisen.

d) Fourier-Reihen stetiger stückweise differenzierbarer Funktionen

Definition: Eine stückweise stetige Funktion heißt stückweise differenzierbar, wenn es nur isolierte Punkte gibt, in denen f nicht stetig differenzierbar ist, und wenn auch in diesen Ausnahmepunkten sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert von $f(t)$ existieren.

Hier interessieren wir uns für periodische Funktionen; für diese bedeutet die Definition, daß es pro Periodenintervall höchstens endlich viele Punkte geben darf, in denen die Ableitung nicht definiert ist, aber auch

dort muß sie einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert haben.

Einfache Beispiele stückweise differenzierbarer Funktionen sind die Rechteckschwingungen aus §2b), die überall außer in den Sprungstellen stetig differenzierbar sind und Ableitung null haben; in den Sprungstellen verschnindet daher auch sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert. Die Funktion ist aber trotzdem nicht differenzierbar in den Sprungstellen, da sie dort nicht einmal stetig ist. (Wäre f differenzierbar, so würde die Ableitung identisch verschwinden, die Funktion müßte also nach dem üblichen Argument über den Mittelwertsatz der Differentialrechnung konstant sein.)

Genauso ist beim Sägezahn aus §2c) die Ableitung überall außer in den Sprungstellen gleich -1 ; in den Sprungstellen ist die Funktion nicht differenzierbar, aber beide Grenzwerte der Ableitung sind gleich -1 .

Weiteres Beispiel einer stetigen stückweise differenzierbaren Funktion ist etwa

$$f(t) = |t| \quad \text{für} \quad |t| \leq 1,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode zwei. Für alle $t \notin \mathbb{Z}$ ist f differenzierbar; falls die größte ganze Zahl kleiner t gerade ist, ist die Ableitung $+1$, ansonsten -1 . Bei einer geraden ganzen Zahl ist der linksseitige Grenzwert der Ableitung -1 und der rechtsseitige $+1$, bei einer ungeraden ist es umgekehrt.

Für eine stückweise differenzierbare Funktion können wir nicht wirklich von der abgeleiteten Funktion reden, da diese nicht in jedem Punkt existieren muß. Wir können aber eine Funktion $\varphi(t)$ definieren, die überall dort mit $f'(t)$ übereinstimmt, wo $f'(t)$ existiert; in den übrigen Punkten setzen wir $\varphi(t)$ auf irgendeinen beliebigen Wert, zum Beispiel auf null.

Die Funktion

$$\tilde{f}(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau.$$

ist stetig und stückweise differenzierbar, und sie hängt nicht ab vom Wert von φ in den Ausnahmepunkten; ihre Ableitung stimmt dort, wo sie definiert ist, mit φ überein. Falls f stetig ist, unterscheidet sich f daher nur um eine Konstante von f , und auch f ist eine Stammfunktion von φ .

Setzen wir nun noch zusätzlich voraus, daß $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ periodisch ist, folgt aus der Rechnung im vorigen Abschnitt, daß sich $f(t)$ nur um eine Konstante vom Faltungsprodukt $s * \varphi$ unterscheidet, denn

$$f(T) - f(0) = 0$$

für eine Funktion mit Periode T .

Aus Abschnitt $b)$ wissen wir, daß die FOURIER-Reihe von $s * \varphi$ wie auch von jeder anderen Faltung absolut und gleichmäßig konvergiert; da die Addition einer Konstanten hieran nichts ändert folgt also zusammen mit den übrigen Resultaten aus Abschnitt $b)$

Satz: Ist $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ stetig und stückweise differenzierbar, konvergiert die FOURIER-Reihe von f absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion S_f , die dieselben FOURIER-Koeffizienten hat wie f . ■

e) Der Eindeutigkeitssatz

Auch wenn wir nun wissen, daß die FOURIER-Reihe zumindest für stetige stückweise differenzierbare Funktionen konvergiert, wissen wir noch nicht, wohin sie konvergiert. Diese Frage soll in diesem Abschnitt geklärt werden.

Beginnen wir mit dem einfachsten Fall einer Funktion, deren sämtliche FOURIER-Koeffizienten verschwinden, und die sich zudem noch einigermaßen anständig verhält: Bei einer stückweise stetigen Funktion existieren nach Definition in jedem Punkt die beiden Grenzwerte

$$f(t^+) = \lim_{s \rightarrow t} f(s) \quad \text{und} \quad f(t^-) = \lim_{s < t} f(s),$$

die überall dort, wo f stetig ist, miteinander und mit $f(t)$ übereinstimmen. Für die übrigen Punkte wollen wir verlangen, daß

$$f(t) = \frac{1}{2} (f(t+) + f(t-))$$

der Mittelwert dieser beiden Werte ist.

Satz: Für $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ seien alle FOURIER-Koeffizienten null; außerdem sei in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-)).$$

Dann ist $f(t) \equiv 0$.

Beweis: Auch hier arbeiten wir wieder mit einem Faltungsintegral, und zwar wollen wir versuchen, die Funktion f als Faltung von sich selbst mit einer geeigneten Funktion g auszudrücken; wir suchen also nach einer Funktion g , so daß $f * g = f$ ist. Falls g diese Eigenschaft für beliebige Funktionen f haben soll, die durch ihre FOURIER-Reihe dargestellt werden, müssen dann alle FOURIER-Koeffizienten von g gleich eins sein, denn bei einer Faltung zweier Funktionen multiplizieren sich die FOURIER-Koeffizienten. g hat also die FOURIER-Reihe

$$S_g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{k \cdot i \omega t} \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

was offensichtlich unmöglich ist: Nach der BESSELschen Ungleichung müßte sonst nämlich

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1$$

konvergieren, was natürlich nicht der Fall ist.

Wir können aber eine kleine Modifikation dieser Reihe, betrachten, nämlich

$$I_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k \cdot i \omega t}.$$

Hier sorgt der Exponent $|k|$ im Falle $|r| < 1$ für eine starke Dämpfung der Koeffizienten mit großem Index, so daß es zumindest mit der BESSELschen Ungleichung keine Probleme mehr gibt: Die entsprechende Summe ist zusammengesetzt aus zwei konvergenten geometrischen Reihen. Falls auch $I_r(t)$ selbst konvergiert, können wir damit rechnen

und hoffen, daß wir irgendwann einmal den Grenzübergang $r \rightarrow 1$ machen können, was dann *ungefähr* der Faltung mit der nicht existenten Funktion g entspricht.

Wir berechnen $I_r(t)$ über zwei geometrische Reihen:

Beschränken wir uns zunächst auf positive Indizes, so ist nach der Summenformel

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} r^{|k|} e^{k \cdot i \omega t} &= \frac{1}{1 - r e^{i \omega t}} + \frac{1 - r e^{-i \omega t}}{(1 - r e^{i \omega t})(1 - r e^{-i \omega t})} \\ &= \frac{1 - r \cos \omega t + i r \sin \omega t}{1 + r^2 - 2 r \cos \omega t}. \end{aligned}$$

Ersetzt man in einem der Summanden k durch $-k$, so ändert sich nichts am Koeffizienten $r^{|k|}$ und auch nichts am Realteil von $e^{k \cdot i \varphi}$; der Imaginärteil allerdings ändert sein Vorzeichen. Somit ist

$$\sum_{k=-\infty}^0 r^{|k|} e^{k \cdot i \omega t} = \frac{1 - r \cos \omega t - i r \sin \omega t}{1 + r^2 - 2 r \cos \omega t}$$

der konjugiert komplexe Wert zu obiger Summe. Der Summand eins für $k = 0$ wurde in beiden Summen berücksichtigt, tritt aber in der Gesamtsumme nur einmal auf; also ist

$$\begin{aligned} I_r(t) &= \frac{1 - r \cos \omega t + i r \sin \omega t}{1 + r^2 - 2 r \cos \omega t} + \frac{1 - r \cos \omega t - i r \sin \omega t}{1 + r^2 - 2 r \cos \omega t} - 1 \\ &= \frac{2 - 2 r \cos \omega t}{1 + r^2 - 2 r \cos \omega t} - 1 = \frac{2 - 2 r \cos \omega t - (1 + r^2 - 2 r \cos \omega t)}{1 + r^2 - 2 r \cos \omega t} \\ &= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2 r \cos \omega t}. \end{aligned}$$

Diese Funktion wollen wir uns für verschiedene Werte von r etwas genauer ansehen.

Abbildung 13 zeigt, daß sich I_r im offenen Intervall $(0, T)$ für $r \rightarrow 1$ immer stärker an die t -Achse annähert, wohingegen die Funktionswerte an den Intervallenden immer stärker ansteigen. In der Tat können wir

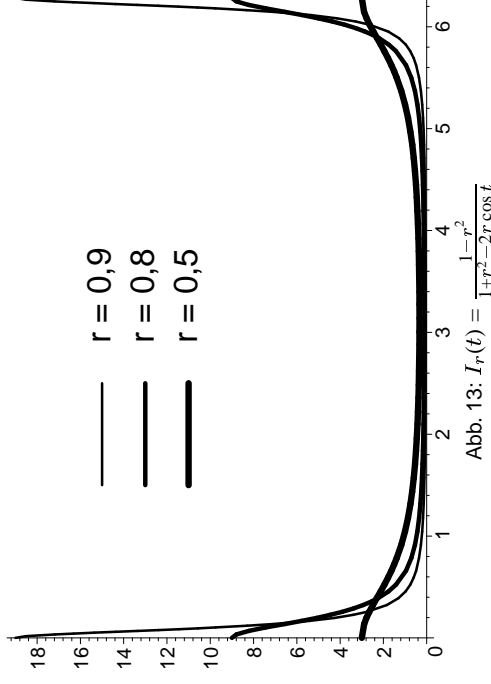


Abb. 13: $I_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos t}$

für $0 < t < T$ beim Grenzübergang $r \rightarrow 1$ einfach $r = 1$ setzen und erhalten

$$I_1(t) = \frac{1 - 1^2}{2 - 2 \cos \omega t} = 0.$$

Für $t = 0$ oder T verschwindet dagegen auch der Nenner, und

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1} I_r(0) &= \lim_{r \rightarrow 1} I_r(T) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{(1+r)(1-r)}{(1-r)^2} = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{(1+r)}{(1-r)} = \infty. \end{aligned}$$

Die Fläche unter der Kurve I_r im Intervall $[0, T]$ ist

$$\int_0^T \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2 r \cos \omega t} dt,$$

ein nicht sehr angenehm aussehendes Integral.

Die Mathematik stellt allerdings seit über hundert Jahren Algorithmen zur Verfügung, mit denen sich nicht nur entscheiden läßt, ob Funktionen wie I_r eine elementar ausdrückbare Stammfunktion haben, sondern auch

berechnen, wie diese Stammfunktion dann aussieht. In den gängigen Computeralgebrasystemen sind diese Algorithmen zumindest teilweise implementiert, und wenn es auch zu weit führen würde, hier zu erklären, wie man eine Stammfunktion des Integranden

$$I_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos \omega t}$$

findet, läßt sich doch das Ergebnis

$$F_r(t) = \int I_r(t) dt = -\frac{2}{\omega} \arctan \left(\frac{r+1}{r-1} \tan \frac{\omega t}{2} \right) + C$$

leicht verifizieren: Nach der Kettenregel ist zunächst

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \arctan \left(a \tan \frac{\omega t}{2} \right) &= \frac{1}{1+a^2 \tan^2 \frac{\omega t}{2}} \cdot \frac{a\omega}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\omega t}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a\omega}{\cos^2 \frac{\omega t}{2} + a^2 \sin^2 \frac{\omega t}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\omega}{1+(a^2-1) \sin^2 \frac{\omega t}{2}}. \end{aligned}$$

Mit der Beziehung

$$\sin^2 \frac{\omega t}{2} = \frac{1 - \cos \omega t}{2}$$

wird das zu

$$\frac{1}{2} \frac{a\omega}{\frac{a^2-1}{2} - \frac{a^2-1}{2} \cos \omega t} = \frac{a\omega}{(a^2+1) - (a^2-1) \cos \omega t}.$$

Für $a = \frac{r+1}{r-1}$ ist

$$a^2 + 1 = 2 \cdot \frac{r^2+1}{(r-1)^2} \quad \text{und} \quad a^2 - 1 = \frac{4r}{(r-1)^2},$$

also wird der Ausdruck zu

$$\begin{aligned} \frac{\frac{r+1}{r-1} \cdot \omega}{2 \cdot \frac{r^2+1}{(r-1)^2} - \frac{4r}{(r-1)^2} \cos \omega t} &= \frac{(r^2-1)\omega}{2(r^2+1) - 4r \cos \omega t}. \end{aligned}$$

Um die Ableitung von F_r zu berechnen, müssen wir das noch mit $-2/\omega$ multiplizieren, was genau den Integranden ergibt. Somit ist F_r eine Stammfunktion von I_r .

Daß es mit dieser Stammfunktion ein Problem gibt, sieht man spätestens dann, wenn man naiv einsetzt und auf

$$\int_0^T I_r(t) dt = F_r(T) - F_r(0) = 0 - 0 = 0$$

kommt, denn aus geometrischen Gründen ist völlig klar, daß das Integral für $r < 1$ positiv sein muß.

Das Problem ist natürlich die Singularität des Tangens im Punkt $\frac{\pi}{2}$: Für $t = \frac{T}{2}$ ist F_r nicht definiert, da der Tangens dort gegen plus oder minus unendlich geht – je nachdem, von welcher Seite wir kommen. Damit ist F_r keine auf dem ganzen Integrationsintervall definierte Stammfunktion, und das Integral kann nicht einfach durch Einsetzen der oberen und der unteren Grenze berechnet werden.

Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert von F_r existieren allerdings auch für $t = \frac{T}{2}$:

Für $0 < t < \frac{T}{2}$ ist $\tan \frac{\omega t}{2}$ positiv und geht gegen $+\infty$ für $t \rightarrow \frac{T}{2}$. Da der Faktor vor dem Tangens für alle $r \in (-1, 1)$ negativ ist, folgt

$$\lim_{\substack{t \rightarrow T/2 \\ t < T/2}} F_r(t) = -\frac{2}{\omega} \lim_{u \rightarrow -\infty} \arctan u = -\frac{2}{\omega} \frac{-\pi}{2} = \frac{T}{2}.$$

Für $\frac{T}{2} < t < T$ dagegen ist $\tan \frac{\omega t}{2}$ negativ und geht gegen $-\infty$ für $t \rightarrow \frac{T}{2}$. Somit ist

$$\lim_{\substack{t \rightarrow T/2 \\ t > T/2}} F_r(t) = -\frac{2}{\omega} \lim_{u \rightarrow \infty} \arctan u = -\frac{2}{\omega} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{T}{2}.$$

Abbildung 14 zeigt die Funktion F_r mit ihrer Sprungstelle in der Intervallmitte.

Zur Berechnung des Integrals von I_r über eine Periode spalten wir es auf in zwei Teilintegrale über Intervalle, in denen wir eine Stammfunktion

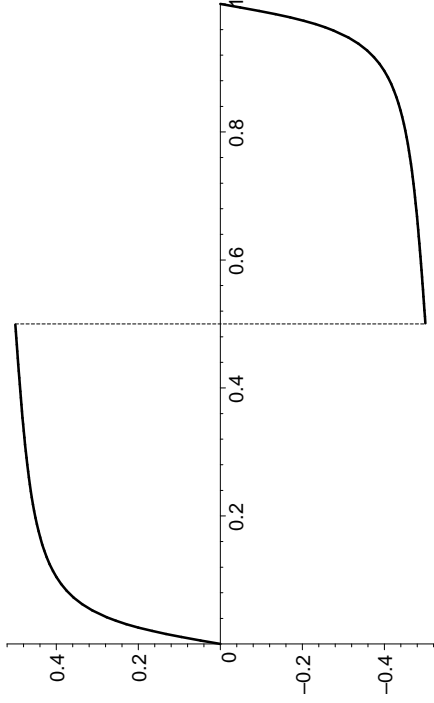


Abb. 14: $F_r(t)$ für $r = 0,8$ und $T = 2$

haben, und erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^T I_r(t) dt &= \int_0^{\frac{T}{2}} I_r(t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T I_r(t) dt \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow T/2 \\ t < T/2}} F_r(t) - F_r(0) + F_r(T) - \lim_{\substack{t \rightarrow T/2 \\ t > T/2}} F_r(t) \\ &= \frac{T}{2} - 0 + 0 + \frac{T}{2} = T. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_r(t) dt = 1 \quad \text{für alle } r \in (-1, 1)$$

und

$$\frac{T}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} I_r(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_r(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Lassen wir nun r gegen eins gehen, ändert sich natürlich nichts an diesen Formeln, aber die beiden Integrale konzentrieren sich immer mehr auf

die Umgebung von $t = 0$ bzw. $t = T$. Damit ist anschaulich ziemlich klar, daß für eine Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1} I_r \star f(t) &= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{T} \int_0^T f(t - \tau) I_r(\tau) d\tau \\ &= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} f(t - \tau) I_r(\tau) d\tau + \int_{\frac{T}{2}}^T f(t - \tau) I_r(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{2} (f(t^-) + f(t^+)), \end{aligned}$$

denn für $r \rightarrow 1$ geht $I_r(t)$ gegen null für alle t im Integrationsbereich außer $t = 0$ und $t = T$. Auf die genauen Abschätzungen zum Beweis dieser Aussage sei verzichtet.

Stattdessen wenden wir die Aussage an auf die Funktion f aus dem Satz; dafür besagt sie, daß

$$\lim_{r \rightarrow 1} I_r \star f(t) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Für $|r| < 1$ ist

$$I_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k \cdot i \omega t}$$

absolut und gleichmäßig konvergent; deshalb kann die Summation mit Integration vertauscht werden und wir erhalten für $I_r \star f$ auch den Ausdruck

$$\begin{aligned} I_r \star f(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k \cdot i \omega(t - \tau)} f(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k \cdot i \omega t} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) e^{-k \cdot i \omega \tau} d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k \cdot i \omega t} \cdot \widehat{f}(k). \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung alle FOURIER-Koeffizienten von f verschwinden, ist also $I_r \star f(t) = 0$ für alle r vom Betrag kleiner eins. Damit ist aber auch

$$f(t) = \lim_{r \rightarrow 1} I_r \star f(t) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

wie behauptet. ■

Das war ein langer Beweis für eine nicht sonderlich aufregende Aussage; der Satz hat jedoch weitreichende Konsequenzen:

Eindeutigkeitssatz: Haben zwei Funktionen $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dieselben FOURIER-Koeffizienten, so unterscheiden sie sich höchstens an Unstetigkeitsstellen.

Beweis: Wir definieren zwei neue Funktion

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)) \quad \text{und} \quad \tilde{g}(t) = \frac{1}{2}(g(t^+) + g(t^-));$$

dann unterscheiden sich f von \tilde{f} und g von \tilde{g} höchstens in den Unstetigkeitsstellen von f bzw. g . Insbesondere haben \tilde{f} und \tilde{f} sowie g und \tilde{g} dieselben FOURIER-Koeffizienten, also auch \tilde{f} und \tilde{g} .

Somit erfüllt $\tilde{f} - \tilde{g}$ alle Voraussetzungen des gerade bewiesenen Satzes, verschwindet also identisch. Damit ist $\tilde{f} = \tilde{g}$; die ursprünglichen Funktionen f und g unterscheiden sich davon höchstens in ihren jeweiligen Unstetigkeitsstellen. ■

Speziell können wir diesen Satz anwenden auf eine stetige stückweise differenzierbare Funktion f : Aus dem vorigen Abschnitt wissen wir, daß deren FOURIER-Reihe absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion S_f konvergiert, die dieselben FOURIER-Koeffizienten wie f hat. Aus dem Eindeutigkeitssatz folgt also

Satz: Die FOURIER-Reihe einer stetigen stückweise differenzierbaren Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert absolut und gleichmäßig gegen f . ■

Kombinieren wir dies mit den speziellen Beispielen aus §3, so erhalten wir den folgenden

Hauptsatz: $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sei stückweise stetig differenzierbar.

a) Ist f in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig, so konvergiert die FOURIER-Reihe dort gleichmäßig gegen f .

b) In jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ konvergiert die FOURIER-Reihe gegen

$$\frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)).$$

c) In jeder Sprungstelle von f tritt das GIBBS-Phänomen auf, d.h. die Teilsummen der FOURIER-Reihe überschwingen die Funktion um einen Betrag, der asymptotisch gleich der Sprunghöhe mal einem Faktor

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \text{Si}(\pi) - 1 \right) \approx 0.089489872$$

ist.

Beweis: Für stetiges f ist a) klar nach dem vorigen Satz und sowohl b) als auch c) sind auch klar, da es keine Sprungstellen gibt, so daß der Wert in b) immer gleich $f(t)$ ist.

Für unstetiges f seien t_1, \dots, t_r die Unstetigkeitsstellen im Intervall $[0, T)$; die Sprunghöhen dort seien

$$a_i \stackrel{\text{def}}{=} f(t_i^-) - f(t_i^+).$$

Mit der aus §3c) bekannten Sägezahnsschwungung

$$s(t) = \begin{cases} \frac{T-t}{T} & \text{für } 0 < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases},$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T , ist dann

$$s_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2a_i}{T} s(t - t_i)$$

eine weitere stückweise differenzierbare Funktion, die ebenfalls Sprunghöhe a_i an der Stelle t_i hat. Also ist auch

$$\tilde{f}(t) = f(t) - \sum_{j=1}^r s_j(t)$$

eine stückweise differenzierbare Funktion, die nun aber *keine* Sprungstellen mehr hat; \tilde{f} ist also stetig und erfüllt daher alle Behauptungen des Satzes.

Für die Funktion s haben wir die drei Behauptungen des Satzes in §3e) und f) explizit nachgerechnet; da sie unter Verschiebung und Reskalierung invariant sind, gelten sie auch für die Funktionen s_i . Damit gelten

$$\text{sie aber auch für } f(t) = \tilde{f}(t) + \sum_{j=1}^r s_j(t).$$

Da praktisch alle Funktionen, deren FOURIER-Reihen man in technischen Anwendungen betrachtet, stückweise differenzierbar sind, wollen wir es für die punktweise Konvergenz bei diesem Satz bewenden lassen; für sonstige stückweise stetige Funktionen wollen wir uns im nächsten Abschnitt mit einer schwächeren Konvergenzaussage begnügen. ■

f) Der Satz von Parseval

Im Zusammenhang mit der BESSELSchen Ungleichung haben wir bereits die HERMITESchen Produkte in $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ miteinander verglichen; jetzt wollen wir sehen, daß sie dieselben Werte liefern. Auch hierbei arbeiten wir mit Faltungen; wesentliches Hilfsmittel ist der folgende, implizit schon im vorigen Abschnitt verwendete

Satz: Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert die FOURIER-Reihe von $f \star g$ überall gleichmäßig gegen $f \star g$; sind $c_k = \widehat{f}(k)$ und $d_k = \widehat{g}(k)$ die FOURIER-Koeffizienten von f und g , ist also für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$f \star g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_k e^{-k \cdot i \omega t}.$$

Aus diesem Satz lassen sich sehr einfach Eigenschaften der Faltung ableiten, z.B. gilt

- Lemma:** a) Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $f \star g = g \star f$
- b) Für $f, g, h \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$

Beweis: Betrachtet man die FOURIER-Reihen, werden die Behauptungen einfach zum Kommutativ- und Assoziativgesetz der Multiplikation komplexer Zahlen. ■

(Man könnte das Lemma natürlich auch direkt durch Integration beweisen.)

Wir wollen den obigen Satz verwenden, um folgende Formel zu beweisen:

Satz von Parseval: Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist

$$(f, g) = (\widehat{f}, \widehat{g}),$$

d.h. für die FOURIER-Koeffizienten c_k von f und d_k von g ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{\widehat{g}(t)} dt.$$

Zum Beweis brauchen wir eine Funktion, deren FOURIER-Koeffizienten die Zahlen $\overline{d_k}$ sind. Komplexe Konjugation der FOURIER-Reihe zu g führt zu

$$\overline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{k \cdot i \omega t}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{d_k} e^{-k \cdot i \omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{d_k} e^{-k \cdot i \omega t}.$$

Ersetzen wir hierin noch t durch $-t$, erhalten wir

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{d_k} e^{k \cdot i \omega t}$$

als FOURIER-Reihe von $\tilde{g}(t) = \overline{g(-t)}$.

Somit ist $f \star \tilde{g}$ eine Funktion mit FOURIER-Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k} e^{k \cdot i \omega t}.$$

Da die FOURIER-Reihe einer Faltung stets gleichmäßig konvergiert und dieselben FOURIER-Koeffizienten hat wie die Faltung selbst, folgt aus dem Eindeutigkeitsatz des vorigen Abschnitts, daß diese Reihe in jedem Punkt t gegen $f \star \tilde{g}(t)$ konvergiert. Speziell für $t = 0$ ist daher einerseits

$$f \star \tilde{g}(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k}$$

und andererseits

$$f \star \tilde{g}(0) = \tilde{g} \star f(0) = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{g}(-\tau) f(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) \overline{g(\tau)} d\tau.$$

Damit ist der Satz bewiesen. ■

Korollar: Sind $c_k = \hat{f}(k)$ die FOURIER-Koeffizienten von f , so ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt.$$

Gelegentlich wird auch dieses Korollar als Satz von PARSEVAL bezeichnet.

Der französische Mathematiker MARC-ANTOINE PARSEVAL DES CHÉNES (1755–1836) publizierte nur fünf mathematische Arbeiten; die 1799 veröffentlichte zweite davon enthält den hier betrachteten Satz.

Als überzeugter Royalist kam PARSEVAL während der französischen Revolution 1792 ins Gefängnis; später mußte er aus Frankreich fliehen, weil ihn NAPOLEON wegen regimekritischer Gedichte verhaften lassen wollte.

Obiges Korollar liefert oft interessante spezielle Werte unendlicher Reihen: Für den Sägezahn mit Periode 2π etwa ist im Intervall $(0, 2\pi)$

$$s(t) = \frac{\pi - t}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2ki} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

mit

$$c_k = \begin{cases} -\frac{i}{2k} & \text{für } k > 0 \\ 0 & \text{für } k = 0 \\ \frac{i}{2k} & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

Somit ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Außerdem ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{8\pi} \cdot 2 \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Somit ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Der Satz von PARSEVAL liefert auch schnell die im vorigen Abschnitt angekündigte schwächere Konvergenzaussage für beliebige stückweise stetige periodische Funktionen: Mit dem HERMITESchen Produkt in $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ können wir in der üblichen Weise eine Norm

$$\|f\|_{2,T} = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt}$$

definieren und sagen, eine Folge f_1, f_2, \dots konvergiere in der L^2 -Norm gegen f , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{2,T} = 0$$

ist. Dann gilt:

Satz: Für jedes $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert die FOURIER-Reihe in der L^2 -Norm gegen f .

Beweis: Wie wir beim Beweis der BESSELSchen Ungleichung gesehen haben, gilt mit $c_k = \hat{f}(k)$ für die Teilsumme

$$S_N = \sum_{k=-N}^N c_k e^{k \cdot i\omega t},$$

daß

$$\|f - S_N\|_{2,T}^2 = (f - S_N, f - S_N) = (f, f) - \sum_{k=-N}^N |c_k|^2.$$

Nach dem Satz von PARSEVAL geht die rechts stehende Differenz für $N \rightarrow \infty$ gegen null, also auch $\|f - S_N\|_{2,T}$. ■

g) Hilbert-Räume

In §2 hatten wir das Problem der harmonischen Analyse verglichen mit dem Problem, einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ bezüglich einer Orthonormalbasis darzustellen; die einfachste Lösung besteht bekanntlich darin, die Skalarprodukte von \vec{v} mit den Basisvektoren \vec{b}_i zu bilden; dann ist

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^n (\vec{v} \cdot \vec{b}_k) \vec{b}_k.$$

Genauso haben wir nun bei der Berechnung einer komplexen FOURIER-Reihe einer Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Skalarprodukte $c_k = (f, e^{k \cdot i\omega t})$ gebildet für alle ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ und gesehen, daß zumindest für stückweise differenzierbare Funktionen für die in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ die Mittelwertbedingung

$$f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

erfüllt ist,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{k \cdot i\omega t}$$

ist, eine sehr ähnliche Situation also.

Es gibt allerdings einen entscheidenden Unterschied: Im Gegensatz zur endlichen Summe oben haben wir hier eine Summe, in der im allgemeinen unendlich viele der Summanden von Null verschieden sind. Eine solche unendliche Summe kann nur sinnvoll definiert werden, wenn wir einen Konvergenzbegriff haben, wie dies etwa in \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n der Fall ist; über Körpern wie \mathbb{Q} oder auch über endlichen Körpern hätten unendliche Summen überhaupt keine sinnvolle Interpretation.

In der linearen Algebra verlangt man daher aus gutem Grund von einer Basis, daß sich alle Vektoren als *endliche* Linearkombinationen von Basisvektoren darstellen lassen, auch wenn die Basis selbst unendlich sein kann.

Aus diesem Grund bilden die Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ keine Basis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, und sie sind auch keine Basis des Untervektorraums

aus allen stückweise differenzierbaren Funktionen mit der Mittelwerteneigenschaft: Sie bilden nur eine Basis des sehr viel kleineren Untervektorraums der (komplexen) trigonometrischen Polynome. Die in §3b) betrachtete Rechteckschwingung f mit Periode T gehört bereits nicht mehr zu diesem Untervektorraum und ist in der Tat linear unabhängig von den Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$; Andernfalls gäbe es nämlich eine nichttriviale endliche Linearkombination

$$\lambda_0 f(t) + \lambda_1 e^{k_1 \cdot i\omega t} + \dots + \lambda_r e^{k_r \cdot i\omega t} = 0,$$

in der λ_0 nicht verschwinden darf, da sonst die $e^{k \cdot i\omega t}$ linear abhängig wären.

Also ist

$$f(t) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} e^{k_1 \cdot i\omega t} + \dots - \frac{\lambda_r}{\lambda_0} e^{k_r \cdot i\omega t},$$

und das ist offensichtlich eine FOURIER-Reihe von f . Da wir die FOURIER-Reihe

$$f(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\sin(2\ell+1)\omega t}{2\ell+1} = - \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{i}{4\ell+2} e^{i(2\ell+1)\omega t}$$

bereits kennen, wissen wir aber nach dem Eindeutigkeitssatz, daß das nicht stimmen kann.

Wenn wir die reinen Schwingungen zu einer Basis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ergänzen wollen, können wir also beispielsweise den Rechteckimpuls als neues Basiselement dazunehmen und, wie man sich leicht überlegt, auch noch den Sägezahn. Tatsächlich muß man noch eine ganze Reihe anderer Funktionen mit hinzunehmen, und bis heute hat es niemand geschafft, eine Basis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ hinzuschreiben.

Der letzte Satz sollte zumindest diejenigen nicht verwundern, die sich aus dem letzten Semester noch an die dortige Diskussion im Zusammenhang mit der Existenz von Basen erinnern: Wir hatten dies nur für endlichdimensionale Vektorräume bewiesen, da es im unendlichdimensionalen Fall logische Schwierigkeiten gibt: Man muß das absolut nichtkonstruktive Auswahlaxiom benutzen, das zu allem Überfluß auch noch von den restlichen Axiomen der Mengenlehre unabhängig ist, so daß zumindest im Prinzip auch eine Mathematik ohne Auswahlaxiom möglich ist. Dort ist dann nicht beweisbar, daß jeder Vektorraum eine Basis hat – was freilich nicht bedeutet, daß nun beweisbar wäre, daß irgendein Vektorraum *keine* Basis hätte.

Von daher ist zumindest für alle praktischen Zwecke das System der Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$ die beste Annäherung an eine Basis, die man bekommen kann.

Sie ist in vielfacher anderer Hinsicht eine Verallgemeinerung der Standardbasis des \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n : Beispielsweise besagt der Satz von PARSEVAL, daß wir den Abstand (bezüglich der L_2 -Norm) zwischen zwei Funktionen, die beide bezüglich dieser Basis dargestellt sind, genauso ausrechnen können, wie wir das vom EUKLIDISCHEN oder HERMITESCHEN Abstand her gewohnt sind – nur daß wir es jetzt eben mit einer unendlichen Summe von Quadraten zu tun haben.

Da eine solche Situation in Funktionsräumen alles andere als selten vorkommt und FOURIER-Reihen beileibe nicht die einzigen unendlichen Summen ihrer Art mit praktischer Bedeutung sind, hat die Mathematik hierfür einen Begriffsapparat nebst zugehörigen Techniken entwickelt, die wir hier in dieser Vorlesung zwar nicht unbedingt brauchen, die aber in manchen Gebieten beispielsweise der Signalverarbeitung oder der optischen Übertragungstechnik eine wichtige Rolle spielen, die Theorie der HILBERT-Räume:

Definition: Ein EUKLIDISCHER oder HERMITESCHER Vektorraum V heißt HILBERT-Raum, wenn jede CAUCHY-Folge aus V gegen ein Element von V konvergiert.



DAVID HILBERT (1862–1943) wurde in Königsberg geboren, wo er auch zur Schule und zur Universität ging. Er promovierte dort 1885 mit einem Thema aus der Invariantentheorie, habilitierte sich 1886 und bekam 1893 einen Lehrstuhl. 1895 wechselte er an das damalige Zentrum der deutschen wie auch internationalen Mathematik, die Universität Göttingen, wo er bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1930 lehrte. Seine Arbeiten umfassen ein riesiges Spektrum aus unter anderem Invariantentheorie, Zahlentheorie, Geometrie, Funktionalanalysis, Logik und Grundlagen der Mathematik sowie auch zur Relativitätstheorie. Er gilt als einer der Väter der modernen Algebra.

Für unsere bislang betrachteten Räume nützt uns der Begriff des

HILBERT-Raums leider nichts: Im Falle endlicher Dimension ist jeder EUKLIDISCHE oder HERMITESCHE Vektorraum ein HILBERT-Raum, denn wir können den Raum vermöge irgendeiner Orthonormalbasis mit \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n identifizieren und das CAUCHYSCHES Konvergenzkriterium komponentenweise anwenden. Von den unendlichdimensionalen Vektorräumen $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, die uns in Augenblick interessieren, ist leider keiner ein HILBERT-Raum, denn wie wir schon gesehen haben ist weder $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ein EUKLIDISCHER noch $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ein HERMITESCHER Vektorraum, da es stückweise stetige Funktionen gibt, deren Norm $\sqrt{\langle f, f \rangle}$ verschwindet, ohne daß f die Nullfunktion wäre.

Dieses Problem wollen wir üblich weitgehend ignorieren; wir bezeichnen einfach für jeden \mathbb{R} - oder \mathbb{C} -Vektorraum V mit einem Produkt, das bis auf die Forderung

$$\langle f, f \rangle = 0 \implies f = 0$$

EUKLIDISCH bzw. HERMITESCH ist, eine Teilmenge $H \subseteq V$ als HILBERT-Raumbasis, wenn es für jedes Element $f \in V$ eine Folge $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus H und eine Folge $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gibt, so daß

$$\delta_N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i = f$$

für $N \rightarrow \infty$ die Eigenschaft hat, daß

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\delta_N, \delta_N) = 0$$

ist. Die Grenzwerte sind dabei natürlich bezüglich der L^2 -Norm zu verstehen.

In diesem Sinne ist das System der Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$ nach der Diskussion im vorigen Abschnitt eine HILBERT-Raumbasis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (auch wenn wir das nur für den Untervektorraum der stückweise differenzierbaren Funktionen beweisen haben), und damit ist auch das System der Funktionen $1, \sin k\omega t, \cos k\omega t$ eine HILBERT-Raumbasis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solche HILBERT-Raumbasen sind in dieser Allgemeinheit leider noch nicht sonderlich nützlich für praktische Anwendungen: Will man einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ als Linearkombination von *irgendeiner* Basis $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$

darstellen, muß man ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen in n Unbekannten lösen. Für endliches n ist das für große n zwar nicht mehr sehr angenehm, aber doch grundsätzlich möglich und per Computer auch noch für n in der Größenordnung von hundert Tausend durchaus praktikabel.

Wird die Dimension allerdings unendlich, so läßt sich ein System aus unendlich vielen Gleichungen in unendlich vielen Variablen nur in sehr speziellen Fällen wirklich lösen; einer davon ist der, den wir bei der Berechnung des FOURIER-Reihe ausgenutzt haben: Im Falle einer abzählbaren orthogonalen HILBERT-Raumbasis $\{\vec{b}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\vec{v} \cdot \vec{b}_i}{\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i} \vec{b}_i$$

leicht berechenbar; noch einfacher wird es, wenn wir von einer orthogonalen HILBERT-Raumbasis ausgehen, da dann alle Nenner eins sind.

Solche orthogonale bzw. orthonormale HILBERT-Raumbasen bezeichnet man als *vollständige Orthogonalsysteme* bzw. *vollständige Orthonormalsysteme*.

h) Die Poisson-Formel

Der Konvergenzbeweis für FOURIER-Reihen war sehr abstrakt; in diesem Abschnitt wollen wir sehen, daß die Methoden, die wir dabei kennengelernt haben, auch nützlich sein können bei der Lösung eines praktischen Problems:

Bei bildgebenden Verfahren der Medizintechnik, bei Werkstoffuntersuchungen, Wärmeleitungsproblemen und vielen anderen Anwendungen hat man es oft mit folgendem *Randwertproblem* zu tun: Man kennt eine Funktion am Rand einer Fläche oder eines Volumens und möchte sie auch im (physikalisch oft unzugänglichen) Innern berechnen.

Sofern man keine einschränkenden Annahmen über die Funktion macht, ist dieses Problem natürlich weit von einer eindeutigen Lösbarkeit entfernt; in vielen interessanten Fällen ist es allerdings eindeutig lösbar.

Wir wollen hier nur ein ganz einfaches Beispiel betrachten: eine auf der Kreislinie bekannte Funktion, die ins Kreisinnere hinein fortgesetzt werden soll. Dabei wollen wir verlangen, daß die Funktion überall der *Kontinuitätsgleichung* $\Delta u = 0$ genügt, wie das beispielsweise für elektrische Potentiale in Abwesenheit von Ladungen der Fall ist. Solche Funktionen haben wir bereits in §1 betrachtet und dort als *harmonische* Funktionen bezeichnet; wir wissen, daß sie gerade die Realteile holomorpher Funktionen sind.

Aus §1d) wissen wir, daß holomorphe Funktionen nach der CAUCHYSchen Integralformel im Innern eines einfach zusammenhängenden Gebiets durch ihre Werte auf der Randkurve bestimmt sind; hier wollen mit Hilfe von FOURIER-Reihen eine entsprechende Formel für harmonische Funktionen finden.

In Polarkoordinaten ausgedrückt ist der LAPLACE-Operator nach [HMI], Kap. 2, §2g1) gleich

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi};$$

für $u(r, \varphi) = r^k \cos k\varphi$ und $u(r, \varphi) = r^k \sin k\varphi$ rechnet man leicht nach, daß $\Delta u = 0$ ist. Damit ist auch

$$\Delta(r^n e^{\pm ik\varphi}) = 0$$

und allgemeiner

$$\Delta u(r, \varphi) = 0 \quad \text{für} \quad u(r, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k r^{|k|} e^{ik\varphi},$$

falls die Summe konvergiert. Für ein Randwertproblem ist die Funktion brauchbar, wenn zusätzlich auch noch

$$u_0(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r \rightarrow 1} u(r, \varphi)$$

für alle Winkel φ existiert.

Ein spezielles Beispiel einer konvergenten Summe ist die Funktion I_r aus Abschnitt e); wenn wir als Argument anstelle von ωt die Winkelvariable φ einsetzen, ist für $|r| < 1$

$$I_r(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik\varphi} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos \varphi}.$$