Kapitel 3
Harmonische Analyse und Integraltransformationen

Selbst der unmusikalischste Zuhörer erkennt sofort, ob ein Ton, beispielsweise zur Note „g“, auf einer Geige oder auf einer Trompete gespielt wurde – obwohl es sich in beiden Fällen um dieselbe Note mit derselben Frequenz 192 Hertz handelt. Der Grund dafür dürfte allgemein bekannt sein: Die verschiedenen Musikinstrumente produzieren zum selben Grundton verschiedene Obertöne. Anhand der Verhältnisse zwischen den Stärken dieser Obertöne (und auch deren zeitlicher Variation) identifiziert unser Ohr die uns vertrauten Instrumente – auch wenn uns die Verhältnisse selbst quantitativ nicht bewußt sind. Umgekehrt werden bei der Synthese von Tönen etwa durch eine Soundkarte reine Schwingungen erzeugt und kombiniert.

Genau wie unser Ohr reagieren auch elektrische Schaltungen in unterschiedlicher Weise auf verschiedene Frequenzen: Legt man beispielsweise an eine Spule mit OHMschem Widerstand R und Induktivität L eine Gleichspannung U_0 an, so fließt ein Strom der Stärke I_0, für den nach dem OHMschen Gesetz gilt: $U_0 = RI_0$. Ersetzt man aber die Gleichspannung durch eine Wechselspannung der Kreisfrequenz ω, so gilt für die Amplitude I_0 des dann fließenden Wechselstroms $U_0 = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\, I_0$, der Widerstand hängt also ab von der Frequenz.

Ersetzt man die Spule durch einen Kondensator mit Kapazität C und Widerstand (der Zuleitungen) R, so fließt beim Anlegen einer Gleichspannung natürlich überhaupt kein Strom: Der Kondensator lädt sich einfach auf. Legt man aber eine Wechselspannung der Kreisfrequenz ω an, fließt ein Strom der Amplitude

$$I_0 = U_0 \Big/ \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\,;$$

auch hier haben wir also wieder einen von der Frequenz abhängigen Widerstand.

Wechselstromkreise haben zwar mehr mit Technischer Informatik zu tun als Geigen und Trompeten; sie gehören aber doch eher zum Arbeitsgebiet eines Elektroinstallateurs als zu dem eines Informatikers. Natürlich fließen auch in einem Computer Ströme, aber mit reinen Wechselströmen kann man fast genauso wenig anfangen wie mit einem Computer, in dem überall ein konstanter Gleichstrom fließt: Elektronische Informationsverarbeitung lebt von schnell und unregelmäßig variierenden Strömen. Diese fließen allerdings durch genau die Schaltelemente, von denen wir gerade gesehen haben, daß ihr Verhalten stark von der Frequenz abhängt.

Um auch solche Situationen berechenbar zu machen, müssen wir einen beliebigen Stromverlauf in eine *Summe reiner Wechselströme* zerlegen, so wie man auch den Ton eines Musikinstruments in seine Grundschwingung und die Oberschwingungen zerlegen kann. Wir werden in diesem Kapitel als erstes sehen, daß man jede (halbwegs vernünftige) *periodische* Funktion beliebig genau durch Summen reiner Schwingungen annähern kann; die entsprechende Konstruktion bezeichnet man als *harmonische Analyse.* Sie gestattet es, auch für ein komplizierteres Signal dessen Verhalten in einer (linearen) Schaltung zu berechnen: Wir müssen einfach jede der reinen Schwingungen, aus denen es zusammengesetzt ist, für sich betrachten und die Ergebnisse aufsummieren.

Für nichtperiodische Funktionen wird sich zeigen, daß hier zwar keine Zerlegung in diskrete Grund- und Oberschwingungen mehr möglich ist, daß es aber ein *kontinuierliches Frequenzspektrum* gibt, mit dem man genauso arbeiten kann, wenn man die Beiträge der einzelnen Frequenzen nicht mehr summiert, sondern aufintegriert.

Bevor wir uns mit diesen Zerlegungen beschäftigen, brauchen wir zunächst einige Vorbereitungen über komplexe Funktionen.

§1: Funktionen einer komplexen Veränderlichen

a) Wozu komplexe Zahlen

Funktionen einer Veränderlichen werden in der Technik typischerweise dazu eingesetzt, um die Zeitabhängigkeit physikalischer Größen auszudrücken: So kann beispielsweise ein Wechselstrom der Amplitude I_0 und der Kreisfrequenz ω durch die Gleichung $I(t) = I_0 \sin\omega t$ beschrieben werden. Schaut man allerdings in Lehrbücher der Elektrotechnik, so findet man dort oft stattdessen die Formel

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t}\,.$$

(Tatsächlich schreiben Elektrotechniker natürlich $e^{j\omega t}$, denn im Gegensatz zu Mathematikern und Physikern bezeichnen sie $\sqrt{-1}$ nicht mit i, sondern mit j.)

Auf den ersten Blick erscheint dies unsinnig: Was soll man sich beispielsweise unter einem Strom von $4 - 2i$ Milliampère vorstellen? Einen solchen Strom gibt es natürlich nicht. Tatsächlich ist die obige Gleichung so zu interpretieren, daß ihr Imaginärteil den tatsächlichen Strom beschreibt, während der Realteil ignoriert wird. Auf Grund der EULERschen Formeln

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t, \quad \cos\omega t = \mathfrak{Re}\, e^{i\omega t} \text{ und } \sin\omega t = \mathfrak{Im}\, e^{i\omega t}$$

beschreibt also auch dieser Formalismus einen tatsächlich fließenden Strom $I_0 \sin\omega t$. (Einige Bücher verwenden die Konvention, daß nur der Realteil zählt und der Imaginärteil ignoriert wird; in diesem Fall würde $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$ den Strom $I_0 \cos\omega t$ beschreiben.)

Der Sinn dieser Vorgehensweise liegt in mindestens zwei rechnerischen Vorteilen: Zum ersten sind Additionsregeln für trigonometrische Funktionen, vor allem wenn man sie mehrfach anwenden muß, ziemlich unangenehm, wohingegen wir für die Exponentialfunktion, egal ob mit reellen oder komplexen Argumenten, stets mit der einfachen Regel $e^{x+y} = e^x e^y$ rechnen kann.

Der zweite Vorteil wird offensichtlich, wenn wir Wechselstromnetzwerke betrachten, die nicht nur Widerstände, sondern auch Spulen und

Kondensatoren enthalten: Geht ein variabler Strom durch eine Spule der Induktivität L, so wird die Spannung $U(t) = L\dot I(t)$ induziert. In reeller Beschreibung ist also bei einem Wechselstrom $I(t) = I_0 \sin\omega t$

$$U(t) = LI_0\omega\cos\omega t\,.$$

Beim komplexen Ansatz mit $I(t) = I_0 e^{i\omega t} = I_0\big(\cos\omega t + i\sin\omega t\big)$ können wir dagegen einfach mit $i\omega L$ multiplizieren, denn

$$i\omega L \cdot I_0 e^{i\omega t} = i\omega L \cdot I_0\big(\cos\omega t + i\sin\omega t\big) = LI_0\omega(-\sin\omega t + i\cos\omega t)$$

hat als Imaginärteil genau die gerade berechnete Funktion $U(t)$. Während wir im Reellen also stets auch die Zeitabhängigkeit der Stromstärke im Auge behalten müssen, reicht es bei komplexer Darstellung, einfach die Amplituden zu betrachten.

Ähnlich ist es bei Kondensatoren: Hier fließt bei Kapazität C und Ladung $Q(t)$ des Kondensators der Strom $I(t) = \dot Q(t)$. Falls dies ein reiner Wechselsstrom ist, können wir ihn – in reeller Form – als $I(t) = I_0 \sin\omega t$ schreiben, und die Spannung zwischen den beiden Platten des Kondensators ist

$$U(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int I(t)\,dt = \frac{1}{C}\int I_0\sin\omega t\,dt = -\frac{I_0\cos\omega t}{\omega C}\,,$$

der Imaginärteil von

$$\frac{1}{i\omega C}\cdot I_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega C}\cdot I_0(\cos\omega t + i\sin\omega t) = \frac{I_0}{\omega C}\cdot(\sin\omega t - i\cos\omega t)\,.$$

Auch hier müssen wir also bei komplexer Darstellung nur mit der festen Zahl $\frac{1}{i\omega C}$ multiplizieren statt wie im Reellen zu integrieren.

Rein formal kann man somit im komplexen Kalkül, der sogenannten *komplexen Zeigerrechnung*, Induktivitäten und Kapazitäten als rein imaginäre „Widerstände“ hinschreiben und mit diesen genauso rechnen, wie man es bei Gleichstromnetzen mit nur OHMschen Widerständen gewohnt ist. Zusammen mit den auch in Wechselstromnetzen allgegenwärtigen OHMsche Widerständen, für die das klassische OHMsche Gesetz gilt, hat man somit insgesamt formal einen komplexen Widerstand, die sogenannte *Impedanz*. Sein Betrag beschreibt den auf die Amplituden des Wechselstroms bezogenen Widerstand, sein Argument die Phasenverschiebung.

Die KIRCHHOFFschen Gesetze gelten auch für die komplexe Beschreibung von Strömen und Spannungen, insbesondere gelten für die Parallel- und Serienschaltung von Impedanzen genau die Regeln, die man von den OHMschen Widerständen her gewohnt ist, und man kann Ströme und Spannungen in Wechselstromnetzwerken mit nur passiven Bauelementen genauso berechnen wie bei Gleichstromnetzwerken, die nur Widerstände enthalten. Der einzige Unterschied besteht darin, daß man nun lineare Gleichungssysteme mit *komplexen* Koeffizienten lösen muß.

Bei einer rein reellen Beschreibung müßte man statt dessen Differentialgleichungssysteme betrachten, was – wie wir im nächsten Kapitel sehen werden – erheblich aufwendiger ist. (Bei kompliziertenen Schaltungen, die auch aktive Bauteile enthalten, gibt es dazu allerdings keine Alternative mehr.)

Auch die eingangs erwähnten Formeln für die Spannungsamplituden in einem RL- *bzw.* RC-Kreis lassen sich durch komplexe Zeigerrechnung leicht erklären: Im RL-Kreis ist die Impedanz gleich $R + i\omega L$; bei einem Wechselstrom $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$ ist die Spannung also in komplexer Darstellung $U(t) = (R + i\omega L) \cdot I_0 e^{i\omega t}$. Da e^{ix} für reelles x stets den Betrag eins hat, ist der Betrag von $U(t)$ gleich dem der komplexen Zahl $(R + i\omega L)I_0$, also $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\, I_0$.

Warum ist dieser Betrag gleich der Amplitude des Imaginärteils? Für die Funktion $Ae^{i\omega t}$ mit komplexem A (hier ist $A = (R + i\omega L) \cdot I_0$), können wir A auch in Polarkoordinaten schreiben als $A = |A| \cdot e^{i\psi_0}$. Dann ist

$$Ae^{i\omega t} = |A| \cdot e^{i(\omega t+\psi)} = |A| \cdot \big(\cos(\omega t + \psi) + i \sin(\omega t + \psi)\big) ,$$

der Imaginärteil hat also in der Tat Amplitude $|A|$. Bei reeller Rechnung kämen wir zwar zum selben Ergebnis, aber wir müßten in diesem Fall die Amplitude der Funktion

$$\omega L I_0 \cos \omega t + R I_0 \sin \omega t$$

berechnen. Dazu müßten wir diesen Ausdruck auf die Form

$$A_0 \sin(\omega t + \psi) = A_0 \sin \psi \, \cos \omega t + A_0 \cos \psi \, \sin \omega t$$

bringen, d.h. wir müßten eine Phasenverschiebung ψ und eine Amplitude A_0 finden, so daß

$$\omega L I_0 = A_0 \sin \psi \quad \text{und} \quad R I_0 = A_0 \cos \psi$$

ist. Wegen der Beziehung $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$ ist natürlich auch hier

$$A_0 = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\, I_0 ,$$

die Rechnung ist aber erheblich aufwendiger.

Auf Grund dieser vielen Vorteile hat sich die komplexe Zeigerrechnung allgemein durchgesetzt; ihre einfache Handhabbarkeit wiegt den Nachteil des zunächst etwas unanschaulichen Ansatzes mehr als auf, und im übrigen gewöhnt man sich nach etwas praktischer Übung auch sehr schnell daran.

Auch in der Wellenoptik erweist es sich oft als große Vereinfachung und Arbeitsersparnis, wenn man mit komplexen Schwingungen rechnet. Wir werden daher in diesem Kapitel nicht nur reelle, sondern auch komplexe Funktionen betrachten. Da wir viel differenzieren und integrieren müssen, wollen wir uns zunächst überlegen, was diese Operationen im Komplexen bedeuten und welche Gesetze dafür gelten.

Wer immer noch Probleme darin sieht, mit komplexen Größen zu rechnen, die keinerlei physikalische Realität haben, sollte sich daran erinnern, daß auch die reellen Zahlen eine mathematische Konstruktion ohne Entsprechung in der Realität sind. Die Erfahrung in Naturwissenschaften, Ingenieurwissenschaften, Wirtschafts- und Sozialwissenschaften haben gezeigt, daß die reellen Zahlen dort außerordentlich nützlich sein können, einen logischen Grund dafür gibt es aber nicht. Genauso verhält es sich mit vielen anderen mathematischen Theorien, insbesondere auch hier beim komplexen Formalismus zur Beschreibung elektrischer Größen.

Der Physik-Nobelpreisträger EUGENE WIGNER (1902–1995) bezeichnete dieses Phänomen im Titel einer seiner Arbeiten als „The unreasobable effectiveness of mathematics in the natural sciences“ *(Communications in pure and applied mathematics* **13** (1960), *1–14; zahlreiche Nachdrucke im WWW).* Wirklich zum Tragen kommt diese schwer erklärbare Nützlichkeit der Mathematik allerdings nur in den Händen eines Anwenders, der sowohl ihre Möglichkeiten als auch ihre Grenzen für seinen jeweiligen Problembereich kennt.

b) Holomorphe Funktionen

Um möglichst schnell zu Ergebnissen zu kommen, identifizieren wir die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$ mit der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$, indem wir den Punkt $x + iy \in \mathbb{C}$ (meist stillschweigend) mit dem Punkt (x, y) aus $\mathbb{R}^2$ identifizieren. Eine Funktionen $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entspricht damit einem Vektorfeld $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Dafür können wir die Ergebnisse aus dem letzten Kapitel anwenden, allerdings liefern uns diese noch nicht alles, was wir brauchen: Die Ableitung $f'(z)$ im Punkt $z \in \mathbb{C}$ soll natürlich eine komplexe Zahl sein; die Ableitung eines Vektorfelds aber ist die reelle JACOBI-Matrix. In der Tat wird sich herausstellen, daß die komplexe Differenzierbarkeit von f eine sehr viel einschneidendere Forderung ist als die Differenzierbarkeit des entsprechenden Vektorfelds; sie hat es daher verdient, daß wir dafür auch ein neues Wort einführen:

Definition: Eine Funktion $f: D \to \mathbb{C}$ auf der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar* im Punkt $z \in D$, wenn der Grenzwert

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existiert und stetig ist. f heißt *komplex differenzierbar in* D, wenn f in jedem Punkt $z \in D$ komplex differenzierbar ist. f heißt *holomorph* in D, wenn zusätzlich $f': D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ist.

Der große Unterschied zum reellen Differentialquotienten liegt darin, daß h hier eine *komplexe* Zahl ist, die sich nicht nur von rechts und links, sondern aus allen Richtungen und auf jedem beliebigen Weg (für den $z + h$ noch in D liegt) dem Nullpunkt nähern kann. Um zu sehen, was das bedeutet, betrachten wir zunächst die beiden einfachsten Fälle, daß sich h ganz auf der reellen *bzw.* der imaginären Achse bewegt.

Konkret sei $z = x + iy$ und

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

mit zwei Funktionen $u, v: D \to \mathbb{R}$. (Hier wird D also als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ aufgefaßt.)

Für *reelles* h ist dann

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i\frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h};$$

der Grenzwert für h gegen Null, so er existiert, ist damit gleich

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Für rein *imaginäres* $h = ik$ ist entsprechend

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{ik} + i\frac{v(x, y+k) - v(x, y)}{ik} \\ &= \frac{v(x, y+k) - v(x, y)}{k} - i\frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{k};\end{aligned}$$

der Grenzwert für h (oder k) gegen Null ist also, so er existiert, gleich

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y).$$

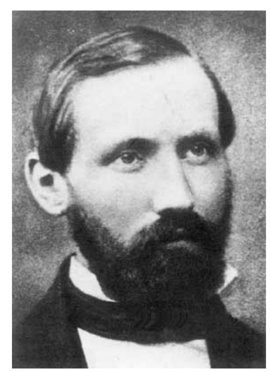
Falls f komplex differenzierbar ist, müssen beide Grenzwerte übereinstimmen, d.h.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

oder kurz

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad v_x = -u_y.$$

Diese Gleichungen heißen CAUCHY-RIEMANNsche Differentialgleichungen; sie sind eine notwendige Bedingung dafür, daß eine Funktion komplex differenzierbar ist.



GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826-1866) war Sohn eines lutherischen Pastors und schrieb sich 1846 auf Anraten seines Vaters an der Universität Göttingen für das Studium der Theologie ein. Schon bald wechselte an die Philosophische Fakultät, um dort unter anderem bei GAUSS Mathematikvorlesungen zu hören. Nach Promotion 1851 und Habilitation 1854 erhielt er dort 1857 einen Lehrstuhl. Trotz seines frühen Todes initiierte er grundlegende auch noch heute fundamentale Entwicklungen in der Geometrie, der Zahlentheorie und über abelsche Funktionen. Seine Vermutung über die Nullstellen der (heute als RIEMANNsch bezeichneten) ζ-Funktion ist die berühmteste offene Vermutung der heutigen Mathematik.

AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789–1857) kennen wir bereits von der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung.

Es ist nicht ganz so offensichtlich, daß die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen sogar *hinreichend* sind. Um das einzusehen, fassen wir $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen reellen Vektorraum auf und betrachten für jede komplexe Zahl $c = a + ib$ die lineare Abbildung

$$\varphi_c \colon \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto cz \end{cases} .$$

Da sie 1 auf $a + ib$ und i auf $-b + ia$ abbildet, hat sie bezüglich der $\mathbb{R}$-Basis $\{1, i\}$ von $\mathbb{C}$ die Abbildungsmatrix

$$M_c = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} ,$$

und umgekehrt entspricht jede lineare Abbildung mit einer Matrix dieser Form der Multiplikation mit einer komplexen Zahl.

Betrachten wir nun die komplexe Funktion $f \colon D \to \mathbb{C}$ als Vektorfeld $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, so ist

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} ,$$

und für dieses Vektorfeld gilt, sofern es differenzierbar ist,

$$f(x + k, y + \ell) = f(x, y) + J_f(x, y) \begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} + o\left(\sqrt{k^2 + \ell^2}\right)$$

mit der JACOBI-Matrix

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} u_x(x, y) & u_y(x, y) \\ v_x(x, y) & v_y(x, y) \end{pmatrix} .$$

Diese Matrix ist genau dann von obiger Gestalt, wenn im Punkt (x, y) die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \quad \text{und} \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y)$$

erfüllt sind; in diesem Fall gilt für die komplexe Zahl

$$w = u_x(x, y) + iu_y(x, y) = v_y(x, y) - iv_x(x, y) ,$$

daß $J_f(x, y) \begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix}$ als komplexe Zahl aufgefaßt gleich $w \cdot (k + i\ell)$ ist. Alsdann läßt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u(x + k, y + \ell) \\ v(x + k, y + \ell) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} + J_f(x, y) \begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} + o\left(\left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\| \right)$$

mit $h = k + i\ell$ auch komplex schreiben als

$$f(z + h) = f(z) + wh + o(h) ,$$

denn der Betrag der komplexen Zahl $h = k + i\ell$ ist gleich $\sqrt{k^2 + \ell^2}$ und damit gleich der Länge des Vektors $\binom{k}{\ell}$. Wenn die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen erfüllt sind, ist f daher im Punkt z komplex differenzierbar mit Ableitung $f'(z) = w$.

Damit haben wir gezeigt

Satz: Die Funktion $f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$ ist genau dann komplex differenzierbar im Punkt $x + iy$, wenn dort die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \quad \text{und} \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y)$$

gelten. ■

c) Beispiele holomorpher Funktionen

Um ein Gefühl für Holomorphie zu bekommen, wollen wir uns überlegen, welche der gängigen Funktionen holomorph sind und welche nicht.

Mit am einfachsten sind die Funktionen $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^n$. Diese lassen sich allerdings nur umständlich in Realteil und Imaginärteil zerlegen – was im übrigen auch der Grund ist, warum eine Formel wie $e^{10it} = \left(e^{it}\right)^{10}$ soviel einfacher ist als

$$\cos 10t = 512 \cos^{10} t - 1280 \cos^8 t + 1120 \cos^6 t - 400 \cos^4 t + 50 \cos^2 t - 1$$

und warum komplexe Funktionen für uns attraktiv sind.

Zumindest in diesem Fall ist es daher einfacher, die komplexe Differenzierbarkeit direkt nachzurechnen; die Rechnung ist identisch mit der aus

Schule und Analysis I bekannten Rechnung im Reellen: Für beliebige Zahlen $z, h \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist nach der binomischen Formel

$$\begin{aligned}(z+h)^n - z^n &= z^n + nhz^{n-1} + \binom{n}{2}h^2z^{n-2} + \cdots + h^n - z^n \\ &= h\left(nz^{n-1} + \binom{n}{2}hz^{n-2} + \cdots + h^{n-1}\right)\end{aligned}$$

und damit

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} = nz^{n-1} + \binom{n}{2}hz^{n-2} + \cdots + h^{n-1}\,.$$

Läßt man rechts h gegen Null gehen, verschwinden alle Terme außer dem ersten, d.h. auch im Komplexen ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = nz^{n-1}\,,$$

und da dies eine stetige Funktion ist, sind zumindest Potenzen holomorph. Damit definieren auch alle komplexen Polynome holomorphe Funktionen und haben ihre gewohnten Ableitungen, denn auch im Komplexen ist Differentiation eine lineare Operation.

Die nächste extrem wichtige Funktion ist die Exponentialfunktion. Auch hier könnten wir direkt rechnen, wollen aber zur Abwechslung die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen anwenden: Nach den EULERschen Formeln ist

$$e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y\,,$$

für $f(z) = e^z$ ist also $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit

$$u(x,y) = e^x \cos y \quad \text{und} \quad v(x,y) = e^x \sin y\,.$$

Damit ist

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) = e^x \cos y \;\text{ und }\; v_x(x,y) = -u_y(x,y) = e^x \sin y\,,$$

die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen sind also erfüllt. Die Ableitung kann z.B. über die Differenzenquotienten mit reellem h berechnet werden; für $z = x + iy$ ist

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x e^{iy} = e^z\,,$$

wie gewohnt. Insbesondere ist die Ableitung stetig, die Exponentialfunktion also holomorph.

Auch die Ableitung von $f(z) = e^{\omega z}$ für $\omega = \lambda + i\mu \in \mathbb{C}$ bringt keine Überraschungen:

$$f(x+iy) = e^{(\lambda+i\mu)(x+iy)} = e^{\lambda x - \mu y} e^{i(\lambda y + \mu x)} = u(x,y) + iv(x,y)$$

mit

$$u(x,y) = e^{\lambda x - \mu y}\cos(\lambda y + \mu x) \quad \text{und} \quad v(x,y) = e^{\lambda x - \mu y}\sin(\lambda y + \mu x)\,,$$

d.h.

$$\begin{aligned}u_x(x,y) = v_y(x,y) &= \lambda e^{\lambda x - \mu y}\cos(\lambda y + \mu x) - \mu e^{\lambda x - \mu y}\sin(\lambda y + \mu x) \\ &= e^{\lambda x - \mu y}\big(\lambda\cos(\lambda y + \mu x) - \mu\sin(\lambda y + \mu x)\big)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}v_x(x,y) = -u_y(x,y) &= \lambda e^{\lambda x - \mu y}\sin(\lambda y + \mu x) + \mu e^{\lambda x - \mu y}\cos(\lambda y + \mu x) \\ &= e^{\lambda x - \mu y}\big(\lambda\sin(\lambda y + \mu x) + \mu\cos(\lambda y + \mu x)\big)\,.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir auch hier das erwartete Ergebnis

$$\begin{aligned}f'(z) &= u_x(x,y) + iv_x(x,y) \\ &= e^{\lambda x - \mu y}\big((\lambda + i\mu)\cos(\lambda y + \mu x) + (-\mu + i\lambda)\sin(\lambda y + \mu x)\big) \\ &= e^{\lambda x - \mu y}\big((\lambda + i\mu)\cos(\lambda y + \mu x) + i(\lambda + i\mu)\sin(\lambda y + \mu x)\big) \\ &= e^{\lambda x - \mu y}(\mu + i\lambda)\big(\cos(\lambda y + \mu x) + i\sin(\lambda y + \mu x)\big) \\ &= \omega e^{\lambda x - \mu y} e^{i(\lambda y + \mu x)} = \omega e^{\omega z}\,.\end{aligned}$$

Wenn wir die EULERschen Formeln

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{und} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

als Definition für komplexwertige trigonometrische Funktionen nehmen, folgt aus der Linearität der Ableitung, daß auch diese Funktionen holomorph sind mit

$$\frac{d}{dz}\cos\omega z = -\omega\sin\omega z \quad \text{und} \quad \frac{d}{dz}\sin\omega z = \omega\cos\omega z\,.$$

Schließlich gilt auch die Produktregel genau wie im Reellen: Sind $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen, so ist für $z, z+h \in D$

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(z+h)-(fg)(z)}{h} &= \frac{f(z+h)g(z+h)-f(z)g(z)}{h} \\ &= \frac{f(z+h)\big(g(z+h)-g(z)\big)+\big(f(z+h)-f(z)\big)g(z)}{h} \\ &= f(z+h)\,\frac{g(z+h)-g(z)}{h}+\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\,g(z)\,,\end{aligned}$$

was für $h \to 0$ gegen $f(z)g'(z)+f'(z)g(z)$ konvergiert. Damit ist auch das Produkt zweier holomorpher Funktionen holomorph, und wie im Reellen gilt die LEIBNIZ-Regel

$$(fg)' = fg' + f'g\,.$$

Auch die zweite wichtige Differentiationsregel, die Kettenregel, folgt genau wie im Reellen: Für eine holomorphe Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ und eine weitere holomorphe Funktion $g\colon D \to U$ mit $U \subseteq \mathbb{C}$ offen ist zunächst wegen der Holomorphie von g für alle $z \in D$

$$g(z+h) = g(z) + hg'(z) + o(h)\,,$$

also folgt aus der Holomorphie von f, daß

$$f\big(g(z+h)\big) = f\big(g(z)+hg'(z)+o(h)\big) = f\big(g(z)\big) + hg'(z)f'\big(g(z)\big) + o(h)$$

ist, und

$$\frac{f\big(g(z+h)\big)-f\big(g(z)\big)}{h} = g'(z)\,f'\big(g(z)\big) + \frac{o(h)}{h}$$

konvergiert für $h \to 0$ gegen $g'(z)\,f'\big(g(z)\big) = f'\big(g(z)\big)g'(z)$. Also ist auch $f\big(g(z)\big)$ eine holomorphe Funktion, und wie im Reellen ist

$$\frac{d}{dz}f\big(g(z)\big) = f'\big(g(z)\big)g'(z)\,.$$

Um zu sehen, daß es auch keine Probleme mit von Null verschiedenen Quotienten gibt, müssen wir daher nur noch die eine Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \\ \qquad z \mapsto \dfrac{1}{z} \end{cases}$$

betrachten. Hier ist

$$f(x+iy) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\,,$$

also

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad\text{und}\quad v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,.$$

Somit ist

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad\text{und}\quad v_x = -u_y = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

also

$$f'(z) = \frac{y^2-x^2+2ixy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-(x-iy)^2}{\big((x+iy)(x-iy)\big)^2} = \frac{-1}{(x+iy)^2} = \frac{-1}{z^2}\,.$$

Insbesondere wissen wir damit, daß alle Funktionen holomorph sind, die durch Grundrechenarten und Hintereinanderausführung aus Potenzen, Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen zusammengesetzt werden können – sofern bei den Divisionen keine Nullen im Nenner auftauchen.

Beispielsweise ist also

$$f(z) = \sin z \cdot e^{2z^2+\cos z}$$

eine holomorphe Funktion, und ihre Ableitung kann genau wie im Reellen berechnet werden als

$$f'(z) = (4z\sin z - \sin^2 z + \cos z)e^{2z^2+\cos z}\,.$$

Eine bislang noch nicht betrachtete einfache Funktion ist die Betragsfunktion $f(z) = |z|$. Hier ist

$$f(x+iy) = \sqrt{x^2+y^2}$$

stets reell, also $u(x,y) = f(x+iy)$ und $v(x,y) \equiv 0$. Da

$$u_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad\text{und}\quad u_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

im Nullpunkt undefiniert und überall sonst ungleich Null sind, sind hier die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen *nirgends* erfüllt;

im Komplexen ist also die Betragsfunktion *nirgends* komplex differenzierbar oder gar holomorph.

Dasselbe gilt auch für die komplexe Konjugation $f(z) = \overline{z}$, denn hier ist

$$f(x+iy) = x - iy, \quad \text{d.h. } u(x,y) = x \text{ und } v(x,y) = -y\,,$$

so daß überall

$$u_x(x,y) = 1 \neq -1 = v_y(x,y)$$

ist. In diesem Beispiel ist das entsprechende Vektorfeld $(x,y) \mapsto \binom{x}{-y}$ *überall* differenzierbar mit konstanter JACOBI-Matrix $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$, aber da die beiden Diagonalelemente dieser Matrix verschieden sind, entspricht sie keiner komplexen Zahl.

Für $f(z) = \mathfrak{Re}\, z$ schließlich ist $u_x \equiv 1$ und $v_y \equiv 0$, für $f(z) = \mathfrak{Im}\, z$ umgekehrt $u_x \equiv 0$ und $v_y \equiv 1$; auch diese beiden Funktionen sind also nirgends komplex differenzierbar, obwohl die entsprechenden Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2$ überall beliebig oft differenzierbar sind.

d) Der Cauchysche Integralsatz

Wenn wir eine reelle Funktion einer Veränderlichen zwischen $x = a$ und $y = b$ integrieren wollen, gibt es nur eine Möglichkeit, von a nach b zu gehen: Wir befinden uns schließlich auf einer Geraden. Die komplexen Zahlen dagegen bilden eine Ebene, und dort gibt es viele Möglichkeiten, um von einem gegebenen Punkt zu einem anderen zu kommen. Integrale komplexwertiger Funktionen sind daher stets *Kurvenintegrale.*

Das Integral der komplexen Funktion

$$f\colon D \to \mathbb{C}; \quad z = x + iy \mapsto u(x,y) + iv(x,y)$$

längs eines Kurvenstücks $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ kann in völliger Analogie zum RIEMANN-Integral definiert werden: Wir wählen eine Unterteilung

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$$

und betrachten dazu die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{N} f\big(\gamma(\tau_\nu)\big)\big(\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1})\big)$$

für geeignete Zwischenwerte $t_{\nu-1} \le \tau_\nu \le t_\nu$; der Wert des Integrals ist der Grenzwert für immer feinere Unterteilungen, so er existiert.

Es wäre kein Problem, dies im einzelnen auszuführen und so zu einer Definition des Integrals zu kommen, es geht allerdings schneller, wenn wir mit bekannten reellen Integralen arbeiten:

Falls der Integrationsweg γ einfach gleich seinem Definitionsintervall sein sollte, γ also die identische Abbildung ist, haben wir sowohl für den Realteil als auch den Imaginärteil von f gewöhnliche RIEMANN-Summen; wenn die Folge dieser Summen überhaupt konvergiert, dann also gegen eine komplexe Zahl, deren Real- und Imaginärteil die Integrale über Real- und Imaginärteil von f sind:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b \mathfrak{Re}\, f(t)\,dt + i\int_a^b \mathfrak{Im}\, f(t)\,dt \quad \text{für } \gamma\colon \begin{cases} [a,b] \to \mathbb{C} \\ \qquad t \mapsto t \end{cases}.$$

Damit kennen wir Integrale über reelle Integrationswege. Für beliebige Kurvenstücke γ konvergiert die Folge der Summen

$$\sum_{\nu=1}^{N} f\big(\gamma(\tau_\nu)\big)\big(\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1})\big)$$

bei immer weiterer Verfeinerung, falls überhaupt, offensichtlich gegen das komplexe Integral

$$\int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\dot\gamma(t)\,dt$$

mit reellem Integrationsweg, wir können also das Integral einfach über diese Formel definieren:

Definition: *a)* Für eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ und ein Kurvenstück $\gamma\colon [a,b] \to D$ ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\dot\gamma(t)\,dt\,,$$

sofern die (komponentenweise zu berechnende) rechte Seite existiert.
b) Das Integral über eine Kurve γ ist gleich der Summe der Integrale über die Kurvenstücke γ_ν, aus denen γ zusammengesetzt ist.

Wir wollen dies weiter ausrechnen und auf bekannte Integrale über reelle Vektorfelder zurückführen. Dazu schreiben wir

$$\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$$

mit $\alpha, \beta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und identifizieren $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit dem reellen Vektorfeld $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\dot\gamma(t)\,dt \\
&= \int_a^b u\big(\alpha(t),\beta(t)\big) + iv\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\Big)\big(\dot\alpha(t) + i\dot\beta(t)\big)\,dt \\
&= \int_a^b \Big(\Big(u\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\dot\alpha(t) - v\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\dot\beta(t)\Big) \\
&\qquad + i\Big(u\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\dot\beta(t) + v\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\dot\alpha(t)\Big)\Big)\,dt \\
&= \int_a^b \begin{pmatrix} u\big(\alpha(t),\beta(t)\big) \\ -v\big(\alpha(t),\beta(t)\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\alpha(t) \\ \dot\beta(t) \end{pmatrix} dt \\
&\qquad + i\int_a^b \begin{pmatrix} v\big(\alpha(t),\beta(t)\big) \\ u\big(\alpha(t),\beta(t)\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\alpha(t) \\ \dot\beta(t) \end{pmatrix} dt \\
&= \int_\gamma \begin{pmatrix} u(x,y) \\ -v(x,y) \end{pmatrix} ds + i\int_\gamma \begin{pmatrix} v(x,y) \\ u(x,y) \end{pmatrix} ds\,,
\end{aligned}$$

wobei wir γ in der letzten Zeile mit dem Kurvenstück $t \mapsto \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ identifiziert haben.

Mit dieser reellen Interpretation komplexer Integrale können wir nun (mit einer kleinen Einschränkung) sofort *den* zentralen Satz aus der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen beweisen:

Cauchyscher Integralsatz: $f\colon D \to \mathbb{C}$ sei eine holomorphe Funktion, und die geschlossene Kurve γ sei Randkurve einer offenen Teilmenge $G \subset D$, deren Abschluß $\overline{G}$ ganz in D liege. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0\,.$$

Beweis: Wie wir gerade nachgerechnet haben, ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} ds + i\int_\gamma \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} ds\,.$$

Wir berechnen die rechts stehenden Integrale nach dem Satz von GREEN aus Kap. II, §6*f):*

$$\int_\gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} ds = \iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy = -\iint_G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy$$

und

$$\int_\gamma \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} ds = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy\,.$$

In beiden Fällen verschwindet rechts der Integrand nach den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen. Also verschwinden die rechtsstehenden Integrale, und damit folgt die Behauptung. ■

Tatsächlich gilt der CAUCHYsche Integralsatz sogar für komplex differenzierbare Funktionen, d.h. die Stetigkeit der Ableitung ist nicht notwendig. Sie ist allerdings notwendig für den Satz von GREEN, auf den auch CAUCHY 1825 seinen Satz zurückführte. Die Verallgemeinerung auf komplex differenzierbare Funktionen wurde erstmalig 1900 von dem französischen Mathematiker EDOUARD GOURSAT (1858–1936) bewiesen. Sein Beweis, wie auch andere zwischenzeitlich gefundene Beweise, arbeiten direkt mit komplexen Funktionen und setzen keinen der reellen Integralsätze voraus; sie wären daher für uns deutlich aufwendiger als CAUCHYs Beweis. Für praktische Anwendungen wird der obige Satz wohl meist ausreichen; die Verallgemeinerung führt allerdings zu einem erheblich besseren theoretischen Verständnis der komplexen Differenzierbarkeit: Insbesondere kann man damit zeigen, daß Holomorphie und komplexe Differenzierbarkeit tatsächlich dasselbe sind.

Aus dem CAUCHYschen Integralsatz folgt auch, daß Integrale über eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion nicht vom Integrationsweg abhängen, sondern nur von dessen Endpunkten: Sind nämlich γ_1 und γ_2 zwei Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt, so bildet γ_1 zusammen mit der rückwärts durchlaufenen Kurve γ_2 eine geschlossene Kurve γ, auf die der CAUCHYsche Integralsatz anwendbar sein sollte. Etwas problematisch ist dabei nur die Bedingung, daß γ Randkurve einer offenen Menge sein soll. Für konkrete Kurven ist das selten ein Problem, auch wenn man (falls sich γ_1 und γ_2 schneiden) meist mit mehreren geschlossenen Kurven argumentieren muß. Der allgemeine Fall ist mathematisch etwas aufwendiger und braucht insbesondere auch den JORDANschen Kurvensatz; auf Einzelheiten sei daher hier verzichtet.

Als nächstes wollen wir uns überlegen, daß auch im Komplexen ein Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt, nämlich

Satz: Zur Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ gebe es eine komplex differenzierbare Funktion $F\colon D \to \mathbb{C}$, so daß $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in D$. Weiter sei γ eine in D liegende Kurve mit Anfangspunkt z_1 und Endpunkt z_2. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)\,.$$

Zum *Beweis* genügt es, ein Kurven*stück* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ zu betrachten. Wir schreiben

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \text{und} \quad F(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)\,;$$

da F holomorph ist, folgt

$$u(x,y) = U_x(x,y) = V_y(x,y) \quad \text{und} \quad v(x,y) = -U_y(x,y) = V_x(x,y)\,.$$

Damit ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} ds + i\int_\gamma \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} ds = \int_\gamma \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} ds + i\int_\gamma \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} ds\,.$$

Nun erinnern wir uns an die Definition eines reellen Linienintegrals: Ein Vektorfeld wird integriert, indem man es in jedem Punkt von γ mit dem dortigen Tangentenvektor skalar multipliziert und dieses Produkt über $[a,b]$ integriert. Schreiben wir $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, so ist der Tangentenvektor gleich $\begin{pmatrix} \dot\alpha(t) \\ \dot\beta(t) \end{pmatrix}$. Damit folgt

$$\int_\gamma \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} ds = \int_a^b \Big(U_x\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\dot\alpha(t) + U_y\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\dot\beta(t) \Big)\,dt$$

und

$$\int_\gamma \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} ds = \int_a^b \Big(V_x\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\dot\alpha(t) + V_y\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\dot\beta(t) \Big)\,dt\,.$$

Die rechtsstehenden Integranden sind nach der Kettenregel gleich

$$\frac{d}{dt}U\big(\alpha(t),\beta(t)\big) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}V\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\,,$$

die Integrale also nach dem klassischen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gleich

$$U\big(\alpha(b),\beta(b)\big) - U\big(\alpha(a),\beta(a)\big) \quad \text{und} \quad V\big(\alpha(b),\beta(b)\big) - V\big(\alpha(a),\beta(a)\big)\,.$$

Alles zusammen ergibt das Endergebnis

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\,dz &= \Big(U\big(\alpha(b),\beta(b)\big) + iV\big(\alpha(b),\beta(b)\big) \Big) \\ &\quad - \Big(U\big(\alpha(a),\beta(a)\big) + iV\big(\alpha(a),\beta(a)\big) \Big) \\ &= F\big(\alpha(b) + i\beta(b)\big) - F\big(\alpha(a) + i\beta(a)\big) = F(z_2) - F(z_1)\,. \end{aligned}$$

■

e) Die Cauchysche Integralformel und der Logarithmus

Beim Beweis des CAUCHYschen Integralsatzes mußten wir die Holomorphie von f im gesamten Bereich D voraussetzen; nur so waren die Voraussetzungen für die Anwendung des Satzes von GREEN gegeben. Tatsächlich liegt es nicht nur an der Beweismethodik, daß wir diese Voraussetzung brauchen, sondern der Satz kann definitiv falsch werden, wenn die Funktion auch nur in *einem* Punkt des Innengebiets G von γ undefiniert ist.

Als Beispiel dazu betrachten wir die Funktion $f(z) = 1/z$ auf dem Einheitskreis $\gamma\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C};\quad t \mapsto e^{it}$ und fragen nach dem Integral

$$\int_\gamma f(z)\,dz\,.$$

Auf dem Umweg über das Reelle läßt sich dieses Integral leicht ausrechnen: Wegen $\dot\gamma(t) = ie^{it} = i\gamma(t)$ ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\dot\gamma(t)}{\gamma(t)}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} i\,dt = 2\pi i\,.$$

Nach dem Satz vom Ende des letzten Abschnitts können wir so ein Integral auch rein komplex berechnen, wenn wir eine Stammfunktion von f kennen; hier sollte das der (bislang noch nicht als komplexe Funktion eingeführte) natürliche Logarithmus sein. Wenn wir den als holomorphie Funktion auf $\mathbb{C}$ oder zumindestes $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definieren könnten, ließe sich der Satz anwenden und das Integral wäre Null – im Widerspruch zum gerade berechneten Ergebnis. Also muß es offensichtlich Probleme mit dem komplexen Logarithmus geben.

An der Ableitung des Logarithmus kann es nicht liegen: Der Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion ist eine unmittelbare Folgerung aus der Kettenregel und gilt daher im Komplexen genauso wie im Reellen. Falls wir also den natürlichen Logarithmus $\ln z$ als eine Umkehrfunktion der Exponentialfunktion definieren können, hat er die Ableitung $1/z$.

Mit der Definition als Umkehrfunktion allerdings gibt es Probleme: Im Reellen ist die Exponentialfunktion streng monoton wachsend, also insbesondere injektiv, und damit ist klar, daß es genau eine Umkehrfunktion gibt, eben den natürlichen Logarithmus.

Im Komplexen dagegen ist die Exponentialfunktion nicht mehr injektiv: Auf Grund der Beziehung $e^{2\pi i} = 1$ ist $e^z = e^{z+2k\pi i}$ für jede ganze Zahl k, es gibt also unendlich viele komplexe Zahlen, die von der Exponentialfunktion allesamt auf denselben Wert abgebildet werden. Wie man mit so einem Problem umgeht, ist aus der reellen Analysis bekannt: Der Sinus ist schließlich auch nicht injektiv; zur Definition seiner Umkehrfunktion, des Arkussinus, wird er einfach eingeschränkt auf das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, das er bijektiv auf $[-1, 1]$ abbildet; diese Einschränkung hat dann eine wohldefinierte Umkehrfunktion arcsin: $[-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Um bei der komplexen Exponentialfunktion genauso vorgehen zu können, müssen wir zunächst eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ finden, auf der sie injektiv ist.

Ist $e^{z_1} = e^{z_2}$ für zwei komplexe Zahlen z_1, z_2, so ist $e^{z_1-z_2} = 1$, es reicht also, alle $z \in \mathbb{C}$ zu bestimmen, für die $e^z = 1$ ist. Aus $e^{x+iy} = 1$ folgt zunächst, daß $\left|e^{x+iy}\right| = \left|e^x \cdot e^{iy}\right| = e^x = 1$ sein muß, also $x = 0$. Damit muß auch $e^{iy} = \cos y + i \sin y = 1$ sein, also $\cos y = 1$ und $\sin y = 0$, was genau für die ganzzahligen Vielfachen von 2π gilt. Also ist $e^{z_1} = e^{z_2}$ genau dann, wenn sich z_1 und z_2 um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden.

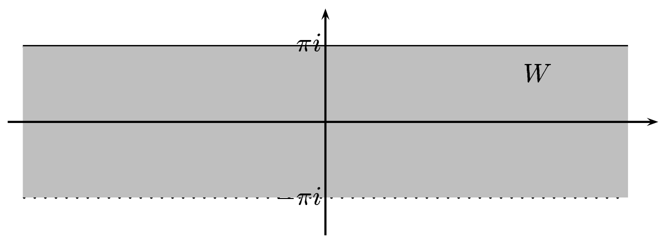
Damit ist die komplexe Exponentialfunktion injektiv beispielsweise auf der Menge

$$W = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} \;\middle|\; -\pi < y \leq \pi \right\}$$

wie auch auf jedem anderen Streifen der Breite 2π parallel zur reellen Achse, der nicht beide Begrenzungslinien enthält, denn zwei Punkte aus einer solchen Menge können unmöglich die Differenz $2\pi i$ haben.

Wir wollen uns überlegen, daß die Exponentialfunktion W bijektiv abbildet auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$: Jede Zahl $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ läßt sich schreiben als $w = re^{i\varphi}$ mit einer reellen Zahl $r = |w| > 0$ und einem Winkel φ

mit $-\pi < \varphi \leq \pi$. (Dies entspricht einfach der Darstellung in reellen Polarkoordinaten.) Zu r gibt es eine reelle Zahl x mit $e^x = r$, nämlich $x = \ln r$, und damit ist $e^{x+i\varphi} = w$.



Definition: Der Hauptwert $\operatorname{Ln} z$ des natürlichen Logarithmus der komplexen Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist die eindeutig bestimmte komplexe Zahl $w \in W$ mit $e^w = z$.

Der so definierte Logarithmus ist aber leider nicht holomorph auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, denn für eine negative reelle Zahl x ist $\operatorname{Ln} x = \ln|x| + \pi i$, für benachbarte Zahlen der Form $x - i\varepsilon$ mit kleinem $\varepsilon > 0$ aber liegt $\operatorname{Ln}(x - i\varepsilon)$ in der Nähe von $\ln|x| - \pi i$. Der Hauptwert des natürlichen Logarithmus ist also unstetig auf der negativen reellen Achse; überquert man diese, springt er um $2\pi i$.

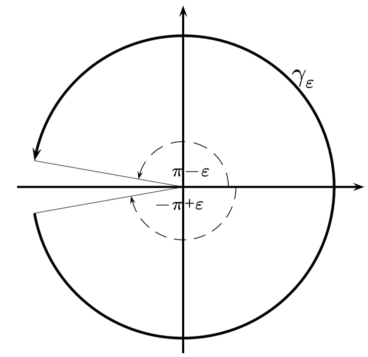
Der Satz am Ende des letzten Abschnitts ist nur anwendbar, wenn wir eine auf dem ganzen Integrationsweg holomorphe Stammfunktion haben; da der Einheitskreis die negative reelle Achse schneidet, ist das hier nicht der Fall. Der Satz wird aber anwendbar, wenn wir den Integrationsweg ein bißchen verkürzen: Das Kurvenstück

$$\gamma_\varepsilon\colon [-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto e^{it}$$

schneidet die negative reelle Achse nirgends, so daß $\operatorname{Ln} z$ auf und um γ_ε eine holomorphe Stammfunktion von $1/z$ ist.

Damit können wir den am Ende des vorigen Abschnitts bewiesenen Satz anwenden und erhalten

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z} = \operatorname{Ln} e^{i(\pi-\varepsilon)} - \operatorname{Ln} e^{i(-\pi+\varepsilon)} = i(\pi - \varepsilon) - i(-\pi + \varepsilon) = 2i(\pi - \varepsilon)\,.$$



Für $\varepsilon \to 0$ konvergiert dies gegen $2\pi i$, wie zu erwarten erhalten wir also auch auf diesem Weg das Ergebnis

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0\,.$$

Insbesondere reicht also schon ein einziger Punkt von G, in dem $f(z)$ nicht definiert ist, um die Behauptung des CAUCHYschen Integralsatzes falsch zu machen.

Das obige Beispiel läßt sich noch stark verallgemeinern: Zunächst können wir anstelle des Einheitskreises auch jeden anderen Kreis um den Nullpunkt betrachten, denn da für $-\pi < t \leq \pi$ und $r > 0$

$$\operatorname{Ln}\left(re^{it}\right) = \ln r + it$$

ist, hebt sich der Term $\ln r$ in obiger Rechnung einfach weg.

Als nächstes können wir den Nullpunkt durch einen anderen festen Punkt $w \in \mathbb{C}$ ersetzen; für einen Kreis

$$\gamma\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto w + re^{it} \quad \text{mit} \quad r > 0$$

ist dann

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - w} = 2\pi i$$

und noch etwas allgemeiner

$$\int_\gamma \frac{a}{z-w}\,dz = a\int_\gamma \frac{dz}{z-w} = 2\pi i\cdot a \quad \text{für alle } a\in\mathbb{C}\,.$$

Tatsächlich können wir den Kreis sogar ersetzen durch *irgendeine* geschlossene doppelpunktfreie Kurve γ, die ein beschränktes Gebiet G berandet und die im mathematisch positiven Sinne, dem Gegenuhrzeigersinn also, durchlaufen wird; auch dann ist für jeden inneren Punkt w von G

$$\int_\gamma \frac{a}{z-w}\,dz = 2\pi i\cdot a\,.$$

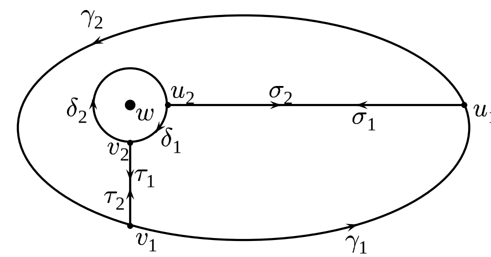
Der Beweis dieser Tatsache ist etwas umfangreicher; im Hinblick auf die nächste Verallgemeinerung wollen wir ihn gleich etwas allgemeiner führen und das Ergebnis als Lemma festhalten:

Lemma: $f\colon D\to\mathbb{C}$ sei eine holomorphe Funktion, und die geschlossene Kurve γ sei Randkurve einer offenen Teilmenge $G\subset D$, die sie im Gegenuhrzeigersinn umlaufe, und deren Abschluß $\overline{G}$ ganz in D liege. Dann ist für jeden inneren Punkt $w\in G$

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \int_\kappa \frac{f(z)}{z-w}\,dz \quad \text{mit} \quad \kappa\colon \begin{cases} [-\pi,\pi]\to\mathbb{C} \\ \qquad t\mapsto w+re^{it} \end{cases},$$

wobei r so gewählt ist, daß die Kreisscheibe um w mit Radius r ganz in G liegt.

Beweis: Wir wählen geeignete Punkte u_1, v_1 auf γ sowie u_2, v_2 auf κ derart, daß es Verbindungskurven von u_1 nach u_2 und von v_1 nach v_2 gibt, die (abgesehen von den Endpunkten u_2, v_2) ganz in G verlaufen und weder sich selbst noch einander schneiden.



Wir bezeichnen das Kurvenstück von u_1 nach u_2 mit σ_1 und das rückwärts durchlaufene Kurvenstück mit σ_2; entsprechend sei das Kurvenstück von v_1 nach v_2 mit τ_1 und die Gegenrichtung mit τ_2 bezeichnet. Außerdem sei γ_1 der Teil von γ zwischen u_1 und v_1 und γ_2 der zwischen v_1 und u_1, jeweils im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen. Auf dem Kreis κ bewegen wir uns ausnahmsweise *im Uhrzeigersinn;* um Verwechslungen mit der üblichen Umlaufrichtung zu vermeiden, verwenden wir dazu einen neuen Buchstaben und bezeichnen das Stück zwischen u_2 und v_2 als δ_1, das zwischen v_2 und u_2 als δ_2.

Dann können wir eine geschlossene Kurve η_1 betrachten, die von u_1 ausgehend zunächst mit dem Kurvenstück σ_1 nach u_2 geht, dann entlang δ_1 nach v_2 und mit τ_1 nach v_1, um dann mit γ_1 nach u_1 zurückzukehren.

Entsprechend können wir auch eine geschlossene Kurve η_2 betrachten, die nacheinander die Kurvenstücke $\gamma_2, \tau_2, \delta_2, \sigma_2$ durchläuft.

Beide Kurven enthalten den Punkt w nicht in ihrem Innengebiet; nach dem CAUCHYschen Integralsatz ist daher

$$\int_{\eta_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = \int_{\eta_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = 0\,.$$

Wenn wir die Kurvenstücke einsetzen heißt dies, daß

$$\int_{\sigma_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\delta_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\tau_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\gamma_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = 0$$

und

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\tau_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\delta_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\sigma_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = 0$$

sind. Addieren wir die beiden Gleichungen und beachten, daß sich die Integrale über σ_1 und σ_2 sowie über τ_1 und τ_2 jeweils gegenseitig wegheben, erhalten wir die Gleichung

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\gamma_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\delta_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\delta_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = 0\,.$$

δ_1 und δ_2 ergänzen einander zu einem im Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis; das Integral über diesen ist gleich minus dem Integral über den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Kreis, also über κ:

$$\int_{\delta_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\delta_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = -\int_{\kappa} \frac{f(z)\,dz}{z-w}\,.$$

Außerdem ist

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = \int_{\gamma_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\gamma_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w}\,,$$

insgesamt also $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-w} - \int_{\kappa} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = 0$, wie behauptet. ■

Speziell für $f(z) \equiv a$ erhalten wir die angekündigte Formel

$$\int_{\gamma} \frac{a}{z-w}\,dz = 2\pi i \cdot a\,.$$

Diese Formel gilt insbesondere auch für eine Kreislinie γ und *irgendeinen* Punkt w im Kreisinnern; w muß also, wie wir schon oben gesehen haben, nicht unbedingt Mittelpunkt sein.

Um das Lemma für eine beliebige Funktion f anwenden zu können, müssen wir nur noch das Integral längs einer geeigneten Kreislinie ausrechnen; dies führt auf die

Cauchysche Integralformel: $f\colon D \to \mathbb{C}$ sei eine holomorphe Funktion, und die geschlossene Kurve γ sei Randkurve einer offenen Teilmenge $G \subset D$, die sie im Gegenuhrzeigersinn umlaufe, und deren Abschluß $\overline{G}$ ganz in D liege. Dann ist für jeden Punkt $w \in G$

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = 2\pi i \cdot f(w)\,.$$

Beweis: Nach dem gerade bewiesenen Lemma ist für jede Kreislinie $\kappa\colon \begin{cases} [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto w + re^{it} \end{cases}$ um w mit hinreichend kleinem Radius r

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \int_{\kappa} \frac{f(z)}{z-w}\,dz\,.$$

Die rechte Seite ist nach Definition eines komplexen Integrals gleich

$$\int_{\kappa} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f\big(\kappa(t)\big)}{\kappa(t)-w}\dot\kappa(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(w+re^{it})}{re^{it}} ire^{it}\,dt$$
$$= i\int_{-\pi}^{\pi} f(w+re^{it})\,dt\,.$$

Diese Formel gilt für alle hinreichend kleinen Radien r; insbesondere gilt sie also auch für $r \to 0$. Dann geht der Integrand aber gegen den konstanten Wert $f(w)$, d.h.

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \int_{\kappa} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = i\int_{-\pi}^{\pi} f(w)\,dt = 2\pi i \cdot f(w)\,,$$

wie behauptet. ■

Man beachte, daß zur direkten Berechnung des Integrals aus der CAUCHYschen Formel nur die Funktionswerte von f auf der Randkurve bekannt sein müssen und daß man damit trotzdem den Funktionswert für jeden beliebigen inneren Punkt berechnen kann!

f) Taylor-Entwicklung holomorpher Funktionen

Als erste Anwendung der CAUCHYschen Integralformel wollen wir uns überlegen, daß jede holomorphe Funktion in der Umgebung eines jeden Punkts ihres Definitionsbereichs durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann. Dazu schreiben wir die CAUCHYsche Integralformel um als

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz\,.$$

Die geschlossene Kurve γ sei dabei der im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Rand irgendeines Gebiets, dessen Abschluß noch im Holomorphiegebiet von f liegt, beispielsweise ein hinreichend kleiner Kreis um w.

Bislang hatten wir w immer als konstant angenommen; da w aber beliebig im Innern des von γ berandeten Gebiets variieren kann, spricht nichts dagegen, auch w als Variable zu betrachten. Tatsächlich wird im folgenden w die eigentlich interessante Variable sein, wohingegen die Integrationsvariable z nur noch eine Hilfsfunktion hat. Um dies auch optisch zu unterstreichen, vertauschen wir die beiden Variablennamen und schreiben die CAUCHYsche Integralformel noch einmal um in

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw\,.$$

Nun entwickeln wir den Integranden in eine Potenzreihe:

Auch im Komplexen gilt die Summenformel für geometrische Reihen

$$\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,,$$

denn bei deren Herleitung via

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - q\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1-q^{n+1}$$

kann q genausogut eine komplexe wie eine reelle Zahl sein. Für $|q| < 1$ können wir auch wie im Reellen n gegen ∞ gehen lassen und erhalten

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}\,.$$

Für beliebiges $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < |w-z_0|$ ist daher

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{w-z_0}}$$

$$= \frac{1}{w-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}}\,.$$

Setzen wir dies in die CAUCHYsche Integralformel ein, folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\int_\gamma \frac{f(w)(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\int_\gamma \frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)^{k+1}}\cdot(z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$$

mit

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)^{k+1}}\,.$$

Obwohl wir f nur als holomorph, d.h. einmal (komplex) stetig differenzierbar vorausgesetzt haben, konnten wir die Funktion also in eine TAYLOR-Reihe entwickeln! Damit sollte sie insbesondere auch beliebig oft differenzierbar sein, und in der Tat können wir die TAYLOR-Reihe auch in der aus der reellen Analysis vertrauten Weise mit Ableitungen schreiben:

Satz: Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ sei holomorph in der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}$. Dann ist f auf D beliebig oft stetig differenzierbar und sogar analytisch. Genauer gilt für jeden Punkt $z_0 \in D$ und jeden Punkt z aus einer offenen Kreisscheibe um z_0, deren Abschluß ganz in D liegt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k \quad \text{und} \quad f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)^{k+1}} ,$$

wobei γ irgendeine Kreislinie in D um z_0 ist, für die z im Kreisinnern liegt.

Beweis: Wir haben gerade gesehen, daß unter den Voraussetzungen des Satzes gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)^{k+1}} .$$

Die rechts stehende Potenzreihe entstand durch Integration einer geometrischen Reihe; sie ist also absolut und gleichmäßig konvergent und damit beliebig oft differenzierbar im Innern des Kreises γ. Damit ist f dort beliebig oft differenzierbar, insbesondere also beliebig oft stetig differenzierbar, mit k-ter Ableitung

$$f^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\ell=k}^{\infty} \ell(\ell-1)\cdots\big(\ell-(k-1)\big) a_\ell (z-z_0)^{\ell-k} .$$

Für $z = z_0$ verschwinden rechts alle Summanden außer dem ersten, d.h.

$$f^{(k)}(z_0) = k!\, a_k \quad \text{und} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} .$$

Damit können wir die Reihe in gewohnter Weise schreiben, und ein Vergleich der beiden Formeln für a_k zeigt auch die behaupteten Integraldarstellungen der Ableitungen. ■

An diesem Satz zeigt sich deutlich, wie grundverschieden reelle und komplexe Analysis sind: Im Reellen gibt es Funktionen, die n-fach differenzierbar sind, nicht aber $(n+1)$-fach; einfachstes Beispiel ist $f_n(x) = x^{n-1}\,|x|$ für $x = 0$. Außerdem gibt es reelle Funktion wie $f(x) = e^{-1/x^2}$, in den Nullpunkt fortgesetzt durch $f(0) = 0$, die beliebig oft stetig differenzierbar sind, aber (hier für $x = 0$) nicht durch eine

TAYLOR-Reihe dargestellt werden können. (Als komplexe Funktion kann $f(z) = e^{-1/z^2}$ nicht stetig in den Nullpunkt hinein fortgesetzt werden, denn beispielsweise konvergiert $f(x)$ für eine reelle Nullfolge zwar gegen Null, für eine rein imaginäre aber gegen ∞.)

Im Komplexen folgt, wie wir gesehen haben, aus der einmaligen stetigen Differenzierbarkeit bereits, daß die Funktion beliebig oft stetig differenzierbar und überall durch eine TAYLOR-Reihe darstellbar ist. Tatsächlich reicht sogar die gewöhnliche komplexe Differenzierbarkeit, d.h. die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen; um das zu beweisen, hätten wir uns allerdings beim CAUCHYschen Integralsatz nicht mit CAUCHYs Beweis zufrieden geben dürfen, sondern hätten mehr arbeiten müssen. So haben wir nur bewiesen, daß aus den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen *und* der Stetigkeit der beiden partiellen Ableitungen die Existenz *aller* komplexer Ableitungen und die Darstellbarkeit durch eine TAYLOR-Reihe folgt.

g) Meromorphe Funktionen

Der Integrand $f(z) = \dfrac{1}{z-w}$ der CAUCHYschen Integralformel ist natürlich nicht holomorph auf ganz $\mathbb{C}$; für $z = w$ ist er nicht einmal definiert. Allgemeiner ist die Funktion $f_n(z) = \dfrac{1}{(z-w)^n}$ für jede natürliche Zahl n bei $z = w$ nicht definiert und damit erst recht nicht holomorph.

Trotzdem handelt es sich hier um relativ harmlose Ausnahmepunkte: Wenn wir $f_n(w) = \infty$ setzen, haben wir das Verhalten der Funktion ziemlich genau beschrieben. Das Symbol „∞" für Unendlich soll dabei *ein* Element bezeichnen, das wir zu $\mathbb{C}$ hinzunehmen. Die entstehende Menge $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist natürlich kein Körper mehr, denn beispielsweise ist

$$1 + \infty = \infty + \pi = 2\infty = i\infty = \infty \cdot e = \infty ,$$

so daß beispielsweise die Ausdrücke „$\infty - \infty$" und „∞/∞" nicht sinnvoll definierbar sind. Außerdem ist hier im Komplexen $\infty = -\infty$, da wir ja nur *ein* Element zu $\mathbb{C}$ hinzugefügt haben. Dies unterscheidet das „komplexe ∞" vom „reellen ∞", denn im Reellen unterscheidet man bekanntlich sehr wohl zwischen $+\infty$ und $-\infty$. Hier im Komplexen, wo es keine Größerbeziehung gibt, wäre diese Unterscheidung jedoch sinnlos – es sei denn, wir würden für jeden Winkel φ ein eigenes Element $e^{i\varphi} \cdot \infty$ einführen, was wohl doch etwas zuviel des Guten wäre.

Man kann sich das Element ∞ anschaulich am besten vorstellen, indem man die Zahlen*ebene* auf eine *Kugel*, die sogeannte RIEMANNsche Zahlenkugel, abbildet. Dies geschieht durch die *stereographische Projektion:*

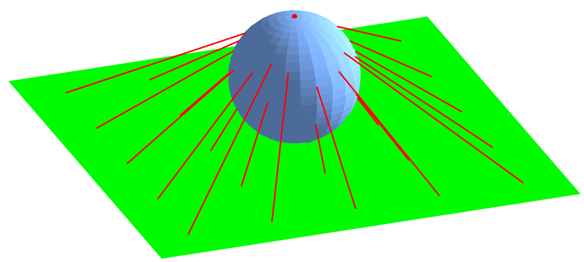


Abb. 1: Die stereographische Projektion

Dazu wird die Kugel so auf die Ebene gelegt, daß ihr Südpol gleich dem Nullpunkt ist, und jeder Punkt P der Ebene wird durch eine Gerade mit dem Nordpol verbunden. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kugeloberfläche ist das Bild von P auf der Kugel. Unter dieser Abbildung entsprechen die Punkte der Ebene eineindeutig den Punkten auf der Kugeloberfläche – mit Ausnahme des Nordpols. Das Bild eines Ebenenpunkts auf der Kugel liegt umso näher am Nordpol, je weiter der Punkt vom Nullpunkt der Ebene entfernt ist. Daher kann man den Nordpol der Kugel mit dem Punkt ∞ identifizieren, was in der komplexen Analysis auch in der Tat die übliche Vorgehensweise ist.

Das neue Element „∞“ ist sicherlich nicht ganz unproblematisch; wir dürfen es auf keinen Fall als gleichberechtigt mit den gewöhnlichen komplexen Zahlen betrachten. Insbesondere dürfen wir nicht erwarten, daß wir mit *beliebigen* Funktionen $f\colon D \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sonderlich viel anfangen können; wir müssen uns beschränken auf Funktionen nach Art der beiden Eingangsbeispiele, bei denen die Stellen, an denen die Funktion unendlich wird, hinreichend isoliert sind und die Funktion außerhalb dieser Stellen holomorph ist:

Definition: Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *meromorph*, wenn gilt:

1. Die Menge $M \subseteq D$, auf der f den Wert ∞ annimmt, hat keine Häufungspunkte.
2. Die Einschränkung
$$f_{D \smallsetminus M}\colon D \smallsetminus M \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto f(z)$$
ist holomorph.
3. Zu jedem Punkt $w \in M$ gibt es eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$, so daß $g(z) = (z-w)^n f(z)$ in einer Umgebung von w holomorph ist.

Die Punkte $w \in M$ heißen *Polstellen* von f; die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$, für die 3. gilt, heißt *Ordnung* der Polstelle w.

Es ist klar, daß die beiden Eingangsbeispiele meromorph sind im Sinne dieser Definition: $f(z) = 1/z$ hat genau einen Pol im Nullpunkt, d.h. $M = \{0\}$; die Ordnung dieses Pols ist eins, denn $z \cdot f(z) \equiv 1$ ist (sogar auf ganz $\mathbb{C}$) holomorph. Entsprechend hat $g(z) = 1/(z-2)^2$ einen Pol zweiter Ordnung bei $w = 2$ und ist in allen anderen Punkten von $\mathbb{C}$ holomorph.

Ein Beispiel einer meromorphen Funktion mit unendlich vielen Polstellen ist
$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}.$$
Diese Funktion ist holomorph in allen Punkten, in denen der Kosinus nicht verschwindet, d.h. auf $\mathbb{C} \smallsetminus M$ mit
$$M = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$
Vom Reellen her wissen wir, daß
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
ist; dies gilt auch im Komplexen, denn
$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \cdot \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots.$$
Wir müssen allerdings keine Nullstelle des Sinus, sondern die Nullstellen des Kosinus kompensieren; dazu erinnern wir uns daran, daß der

Name *Kosinus* daher kommt, daß es sich um den Sinus des Komplementärwinkels handelt, d.h. $\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$. Daher ist

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{2}} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)}{z - \frac{\pi}{2}} = -\lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right)}{z - \frac{\pi}{2}} = -1\,.$$

Genauso rechnet man nach, daß $\lim\limits_{z\to-\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{2}} = 1$ ist. Da beide Grenzwerte nicht verschwinden, folgt daraus für die Kehrwerte

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{z - \frac{\pi}{2}}{\cos z} = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{z\to-\frac{\pi}{2}} \frac{z + \frac{\pi}{2}}{\cos z} = 1\,,$$

also schließlich

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2}\right) \tan z = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{(z - \frac{\pi}{2}) \sin z}{\cos z} = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$

und

$$\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}} \left(z + \frac{\pi}{2}\right) \tan z = \lim_{z\to-\frac{\pi}{2}} \frac{(z + \frac{\pi}{2}) \sin z}{\cos z} = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1\,;$$

entsprechend auch an den um 2π verschobenen Stellen. Somit hat der Tangens in allen Punkten aus M Pole erster Ordnung, ist also auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph.

(Hier bewährt sich wieder, daß wir nur *einen* Punkt ∞ betrachten: Es wäre nicht möglich, den Tangens in sinnvoller Weise als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}\cup\{-\infty, \infty\}$ zu definieren, denn an jeder Polstelle ist der Grenzwert von der einen Seite gleich $-\infty$ und von der andern gleich ∞.)

h) Laurent-Reihen

Wir wollen uns als nächstes davon überzeugen, daß auch jede meromorphe Funktion um *jeden* Punkt ihres Definitionsbereichs in so etwas ähnliches wie eine TAYLOR-Reihe entwickelt werden kann, die sogenannte LAURENT-Reihe.

Betrachten wir nun eine meromorphe Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ und einen Punkt $z_0 \in D$. Falls f in z_0 holomorph ist, ist es auch in einer Umgebung von z_0 holomorph, also dort in eine TAYLOR-Reihe entwickelbar.

Andernfalls muß z_0 ein Pol sein; dessen Ordnung sei n. Dann ist die Funktion $g(z) \underset{\text{def}}{=} (z - z_0)^n f(z)$ in einer Umgebung von z_0 holomorph, hat dort also eine TAYLOR-Entwicklung

$$g(z) = (z - z_0)^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k\,.$$

Division durch $(z - z_0)^n$ ergibt die LAURENT-Reihe

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k = c_{k-n}\,.$$

Dabei ist $a_{-n} \neq 0$, denn sonst wäre auch $(z - z_0)^{n-1} f(z)$ holomorph in einer Umgebung von z_0, die Polstelle hätte also höchsten die Ordnung $n - 1$.

Damit folgt:

Satz: Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ sei meromorph in der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}$. Dann gibt es für jeden Punkt $z_0 \in D$ eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, so daß für jeden Punkt $z \neq z_0$ aus einer offenen Kreisscheibe um z_0, deren Abschluß ganz in D liegt und außer eventuell z_0 keine Pole von f enthält, gilt:

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)\,dw}{(w - z_0)^{k+1}}\,,$$

wobei γ irgendeine Kreislinie um z_0 ist, für die z im Kreisinnern liegt und dieses Innere keine Polstellen außer höchstens z_0 enthält. ■

PIERRE ALPHONSE LAURENT (1813–1854) war Kommandant eines Ingenieurkorps der französischen Armee und leitete unter anderem den Ausbau des Hafens von Le Havre. Seine Arbeit über die LAURENT-Reihen reichte er etwas zu spät für den großen Preis der Akademie von 1842 ein, so daß sie trotz CAUCHYs Fürsprache nicht berücksichtigt wurde. Ansonsten schrieb er anscheinend nur noch zwei weitere Arbeiten, die erst von seiner Witwe bei der Akademie eingereicht wurden. Die eine erschien 1863, die andere nie.

Eine LAURENT-Reihe unterscheidet sich somit nur dadurch von einer TAYLOR-Reihe, daß sie auch endlich viele Summanden mit negativen

Exponenten haben kann. Diese treten genau dann auf, wenn die Funktion f im Punkt z_0 einen Pol hat. Wählt man n minimal, ist also $a_{-n} \neq 0$ ist, so handelt es sich dabei offenbar genau um einen Pol n-ter Ordnung: Multipliziert man nämlich die LAURENT-Reihe mit $(z-z_0)^n$, so verschwinden alle negativen Potenzen; sie wird also zur TAYLOR-Reihe einer holomorphen Funktion. Multipliziert man dagegen mit einer kleineren Potenz von $(z-z_0)$, so steht nach a_{-n} weiterhin eine negative Potenz, das Produkt wird also für $z = z_0$ weiterhin unendlich.

Die Summe

$$H(z) = \sum_{k=-n}^{-1} a_k (z-z_0)^k = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{a_{-\ell}}{(z-z_0)^\ell}$$

der Terme mit negativen Potenzen wird als *Hauptteil* der meromorphen Funktion $f(z)$ im Punkt z_0 bezeichnet; offensichtlich ist die Differenz $f(z) - H(z)$ in einer Umgebung von z_0 holomorph, da sie dort durch eine TAYLOR-Reihe dargestellt werden kann.

Über die Hauptteile einer meromorphen Funktion läßt sich die altbekannte Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen neu verstehen: Ist $f(z) = P(z)/Q(z)$ eine rationale Funktion, Quotient zweier Polynome also, und hat der Nenner die komplexen Nullstellen $z_1, \ldots, z_r$ mit Vielfachheiten $e_1, \ldots, e_r$, so hat die LAURENT-Reihe im Punkt z_ν einen Hauptteil der Form

$$H_\nu(z) = \sum_{k=1}^{e_\nu} \frac{a_{-k,\nu}}{(z-z_\nu)^k} \,.$$

Da die Differenz $f(z) - H_\nu(z)$ im Punkt z_ν holomorph ist, haben wir nach Subtraktion *aller* Hauptteile eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe rationale Funktion

$$h(z) = f(z) - \sum_{\nu=1}^{r} H_\nu(z) \,;$$

das Nennerpolynom von h hat also, bei gekürzter Darstellung, keine Nullstelle. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, ist ein Polynom ohne komplexe Nullstelle notwendigerweise konstant, die Funktion $h(z)$

ist also ein Polynom, und wir haben die Partialbruchzerlegung

$$f(z) = h(z) + H_1(z) + \cdots + H_r(z) \,.$$

Berechnet wird sie im allgemeinen natürlich nicht über die Integraldarstellung der Koeffizienten in den Hauptteilen, sondern über einem Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten. Ein solcher Ansatz ist aber nur gerechtfertigt, wenn die *Existenz* einer solchen Zerlegung klar ist; diese Existenz läßt sich beispielsweise mit dem EUKLIDischen Algorithmus beweisen oder aber, wie hier, mit LAURENT-Reihen.

LAURENT-Reihen sind beispielsweise nützlich in der diskreten Signalverarbeitung, wo man es mit Folgen $(a_k)_{k\geq n}$ reeller oder komplexer Zahlen zu tun hat, nämlich den Werten eines Signals zu den Zeitpunkten $t = k$. Einer solchen Folge ordnet man ihre z-Transformierte

$$X(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$$

zu, aus der wiederum sich die Folge der a_k nach obigen Formeln rekonstruieren läßt durch

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{X(w)\,dw}{w^{k+1}} \,.$$

Die z-Transformation wird vor allem angewandt, um linear rekursiv definierte Folgen zu bestimmen oder (was äquivalent ist) sogenannte lineare Differenzengleichungen zu lösen. Ihre Nützlichkeit kommt daher, daß bei einer Schaltung der Zustand zu einem gegebenen Zeitpunkt meist relativ einfach als Funktion der Zustände in den vorausgegangenen Takten ausgedrückt werden kann.

Wir betrachten hier nur ein ganz einfaches Beispiel, in dem weder komplexe Zahlen noch Koeffizienten mit negativem Index auftauchen:

Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch

$$a_0 = 1 \quad \text{und} \quad a_{k+1} = 3a_k + 1 \ \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Dann ist überall dort, wo beide Seiten konvergieren, auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (3a_k + 1) z^k \,.$$

Mit $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ist die rechte Seite gleich

$$\sum_{k=0}^{\infty}(3a_k + 1)z^k = 3X(z) + \sum_{k=0}^{\infty} = 3X(z) + \frac{1}{1-z} ;$$

die linke ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}z^k = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}z^{k+1} = \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k = \frac{X(z)-1}{z} ,$$

denn $a_0 = 1$. Somit ist

$$\frac{X(z)-1}{z} = 3X(z) + \frac{1}{1-z}$$

und

$$\left(\frac{1}{z} - 3\right) X(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z} = \frac{1}{z(1-z)} ,$$

also

$$X(z) = \frac{\frac{1}{z(1-z)}}{\frac{1}{z} - 3} = \frac{\frac{1}{1-z}}{1-3z} = \frac{1}{(1-z)(1-3z)} .$$

Von letzterer Funktion brauchen wir die LAURENT-Entwicklung; die bekommen wir am einfachsten durch Partialbruchzerlegung: Nach der allgemeinen Theorie läßt sich der Bruch schreiben als

$$\frac{1}{(1-z)(1-3z)} = \frac{a}{1-z} + \frac{b}{1-3z} = \frac{a(1-3z)+b(1-z)}{(1-z)(1-3z)}$$
$$= \frac{(a+b)-(3a+b)z}{(1-z)(1-3z)} ;$$

a und b können also leicht berechnet werden als die Lösungen $a = -1/2$ und $b = 3/2$ des linearen Gleichungssystems $a + b = 1$ und $3a + b = 0$.

Somit ist

$$X(z) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-z} + \frac{3}{2}\frac{1}{1-3z} = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} z^k + \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(3z)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{k+1}-1}{2} z^k ,$$

und diese Reihe konvergiert für alle z mit $|z| < 1/3$. Also ist

$$a_k = \frac{3^{k+1}-1}{2} .$$

Für Interessenten sei noch ein geringfügig interessanteres zweites Beispiel betrachtet, die sogenannten FIBONACCI-Zahlen F_i. Sie sind durch folgende Rekursionsformel definiert:

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad F_i = F_{i-1} + F_{i-2} \quad \text{für } i \geq 2 .$$

FIBONACCI führte sie ein, um die Vermehrung einer Karnickelpopulation durch ein einfaches Modell zu berechnen.. In seinem 1202 erschienenen Buch *Liber abaci* schreibt er:

Ein Mann bringt ein Paar Karnickel auf einen Platz, der von allen Seiten durch eine Mauer umgeben ist. Wie viele Paare können von diesem Paar innerhalb eines Jahres produziert werden, wenn man annimmt, daß jedes Paar jeden Monat ein neues Paar liefert, das vom zweiten Monat nach seiner Geburt an produktiv ist?

LEONARDO PISANO (1170–1250) ist heute vor allem unter seinem Spitznamen FIBONACCI bekannt; gelegentlich nannte er sich auch BIGOLLO, auf Deutsch *Tunichtgut* oder *Reisender.* Seine Bücher waren mit die ersten, die die indisch-arabischen Ziffern in Europa einführten. Er behandelt darin nicht nur Rechenaufgaben für Kaufleute, sondern auch zahlentheoretische Fragen, beispielsweise daß man die Quadratzahlen durch Aufaddieren der ungeraden Zahlen erhält. Auch betrachtet er Beispiele nichtlinearer Gleichungen, die er approximativ löst, und erinnert an viele in Vergessenheit geratene Ergebnisse der antiken Mathematik.

Um die Zahlen F_i durch eine geschlossene Formel darzustellen, betrachten wir ihre z-Transformierte

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i z^i .$$

Auf Grund der Rekursionsformel $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ für $i \geq 2$ ist

$$\sum_{i=2}^{\infty} F_i z^i = \sum_{i=2}^{\infty} F_{i-1}z^i + \sum_{i=2}^{\infty} F_{i-1}z^i = z\sum_{i=1}^{\infty} F_i z^i + z^2\sum_{i=0}^{\infty} F_{i-1}z^i ,$$

was wir wegen $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ auch in der Form

$$X(z) - z = zX(z) + z^2 X(z)$$

schreiben können. Auflösen nach $X(z)$ führt auch

$$X(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} .$$

Um die rechte Seite als Potenzreihe in z zu schreiben, versuchen wir, sie durch Terme der Form $\frac{1}{1-q}$ darzustellen, die wir als Summen geometrischer Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ schreiben können.

Da $z^2 + z - 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$ ist, verschwindet der Nenner für die beiden Werte

$$z = z_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = -\frac{1 \mp \sqrt{5}}{2} .$$

Ausmultiplizieren (oder der Satz von VIÈTE) zeigt, daß $z_1 z_2 = z_1 + z_2 = -1$ ist, also

$$1 - z - z^2 = -(z - z_1)(z - z_2) = \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{z_1 z_2}$$

$$= \left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\left(1 - \frac{z}{z_2}\right) = (1 + z_2 z)(1 + z_1 z) .$$

Da wir die Summenformel der geometrischen Reihe besser anwenden können, wenn wir Terme der Form $(1 - q)$ haben, definieren wir die beiden neuen Zahlen

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \overline{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} ;$$

dann ist

$$1 - z - z^2 = (1 - \phi z)(1 - \overline{\phi} z) .$$

Bemerkung: ϕ und $\overline{\phi}$ erfüllen die Gleichung $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ oder $\phi^2 = \phi + 1$, d.h. ϕ ist das Verhältnis des *goldenen Schnitts:* Zwei Größen $a > b$ stehen bekanntlich in diesem Verhältnis, wenn sich $a + b$ zu a verhält wie a zu b. Für $\phi = a/b$ ist dies die Bedingung

$$1 + \phi^{-1} = 1 + \frac{b}{a} = \frac{a + b}{a} = \frac{a}{b} = \phi ,$$

die nach Multiplikation mit ϕ zu $\phi + 1 = \phi^2$ wird.

Nach diesen Vorbereitungen können wir mit der Partialbruchzerlegung von $X(z)$ beginnen: Nach der allgemeinen Theorie machen wir den Ansatz

$$X(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{\alpha}{1 - \phi z} + \frac{\beta}{1 - \overline{\phi} z} = \frac{(\alpha + \beta) - (\alpha\overline{\phi} + \beta\phi)z}{1 - z - z^2} ,$$

der auf die beiden Gleichungen

$$\alpha + \beta = 0 \quad \text{und} \quad \alpha\overline{\phi} + \beta\phi = -1$$

führt. Einsetzen von $\beta = -\alpha$ in die zweite Gleichung zeigt, daß

$$\alpha(\overline{\phi} - \phi) = -\alpha\sqrt{5} = -1 \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ist. Also ist

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \phi z} - \frac{1}{1 - \overline{\phi} z} \right) .$$

Diese beiden Summanden können wir nun als Summen geometrischer Reihen interpretieren und erhalten

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi^i z^i + \sum_{i=0}^{\infty} \overline{\phi}^i z^i \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{i=1}^{\infty} (\phi^i + \overline{\phi}^i) .$$

Koeffizientenvergleich zeigt, daß

$$F_i = \frac{\phi^i + \overline{\phi}^i}{\sqrt{5}}$$

ist, womit wir die gesuchte explizite Formel gefunden hätten.

In Zahlen ist $\phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618034$, $\overline{\phi} = 1 - \phi \approx -0{,}618034$ und $\sqrt{5} \approx 2{,}236068$; der Quotient $\overline{\phi}^i/\sqrt{5}$ ist also für jedes i kleiner als $1/2$. Daher können wir F_i auch einfacher berechnen als nächste ganze Zahl zu $\phi^i/\sqrt{5}$. Insbesondere folgt, daß F_i exponentiell mit i wächst.

Für weitere und interessantere Beispiele sei auf die *Elektrotechnik II* verwiesen.

i) Der Fundamentalsatz der Algebra

Wie im vorigen Abschnitt angekündigt, wollen wir uns hier überlegen, daß jedes nichtkonstante komplexe Polynom mindestens eine Nullstelle hat; tatsächlich kann es sogar als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden. Dazu beweisen wir zunächst den

Satz von Liouville: Die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und beschränkt. Dann ist f konstant.

Beweis: Konkret sei $|f(z)| \le M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Für eine Kreislinie γ vom Radius R um einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ ist dann nach dem Satz über die TAYLOR-Entwicklung holomorpher Funktionen aus dem letzten Abschnitt

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)\,dw}{(z-w)^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z+Re^{it})}{(Re^{it})^2} iRe^{it}\,dt\,,$$

also

$$\left|f'(z)\right| \le \frac{1}{2\pi} \left|\int_\gamma \frac{f(w)\,dw}{(z-w)^2}\right| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left|f(z+Re^{it})\right|}{R^2}\,dt \le \frac{M}{R}\,.$$

Da $f(z)$ auf ganz z holomorph ist, können wir den Radius R beliebig groß wählen, also muß $f'(z)$ überall verschwinden. Dann muß aber f selbst konstant sein. ∎

JOSEPH LIOUVILLE (1809–1882) war Sohn eines Kapitäns aus NAPOLEONS Armee. Er kam 1825 an die Ecole Polytechnique, wo er unter anderem Vorlesungen von AMPÈRE hörte. 1831 wurde er Assistent bei AMPÈRES Nachfolger MATHIEU; später lehrte er unter anderem am Collège de France und an der Ecole Polytechnique. Nach der 1848er Revolution war er (als gemäßigter Republikaner) kurz Mitglied der Nationalversammlung. Seine über 400 Arbeiten befassen sich unter anderem mit der Zahlentheorie, mit Differentialgleichungen, Differentialoperatoren, Differentialgeometrie, Statistischer Mechanik und Astronomie.

Der Satz von LIOUVILLE zeigt wieder einmal, wie deutlich sich reelle und komplexe Differenzierbarkeit unterscheiden: Im Reellen kennen wir schließlich eine ganze Reihe beschränkter Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, von denen viele nicht nur beliebig oft differenzierbar, sondern auch analytisch, d.h. um jeden Punkt durch eine Potenzreihe darstellbar sind: Bekannte Beispiele sind etwa

$$f(x) = \arctan x\,, \qquad g(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad \text{und} \quad h(x) = e^{-x^2}\,.$$

Die erste dieser Funktionen ist nicht als stetige Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ definierbar, und die beiden anderen sind zwar holomorph auf ganz $\mathbb{C}$, aber im Komplexen nicht mehr beschränkt: $g(z)$ geht für $z \to \pm i$ gegen Unendlich, und $h(z)$ wegen $h(ix) = e^{x^2}$ für Argumente mit immer größer werdendem Imaginärteil.

Ein Polynom $f(z)$ ist natürlich auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph; es ist allerdings i.a. nicht beschränkt. Wenn es aber keine Nullstellen hat, ist auch $1/f(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, und diese Funktion *ist* beschränkt: Für konstantes f ist das trivial, und für ein nichtkonstantes Polynom ist stets

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty, \quad \text{also} \quad \lim_{z\to\infty} \frac{1}{f(z)} = 0\,.$$

Somit gibt es zu jeder positiven Zahl M_1 einen Radius $R > 0$, so daß $|1/f(z)| < M_1$ für $|z| > R$.

Die Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le R\}$ ist abgeschlossen und beschränkt, also muß dort die stetige Funktion $|1/f(z)|$ ihr Maximum M_2 annehmen, und für das Maximum M der beiden Werte M_1 und M_2 gilt

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right| \le M \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\,.$$

Nach dem Satz von LIOUVILLE ist daher $1/f(z)$ konstant, also auch $f(z)$ selbst. Damit folgt der

Fundamentalsatz der Algebra: *a)* Jedes nichtkonstante Polynom f mit komplexen Koeffizienten hat mindestens eine komplexe Nullstelle.
b) Genauer läßt sich ein komplexes Polynom vom Grad n schreiben als

$$f(z) = a(z-z_1)^{e_1}(z-z_2)^{e_2}\cdots(z-z_r)^{e_r}$$

mit $a, z_\nu \in \mathbb{C}$ und $e_1 + e_2 + \cdots + e_r = n$.

Zum *Beweis* müssen wir nur noch *b)* betrachten; wir zeigen diese Aussage durch vollständige Induktion nach dem Grad von f.

Ein Polynom vom Grad Null ist konstant, d.h. $f(z) = a$, und das ist bereits von der gewünschten Form. Auch die Summenformel gilt in diesem Fall trivialerweise.

Für $n > 0$ hat f mindestens eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$. Diese können wir abdividieren, d.h. wir dividieren das Polynom $f(z)$ mit Rest durch $z - z_0$:

$$f(z) : (z - z_0) = g(z) \;\text{ Rest } R(z)\,.$$

Dabei hat der Rest $R(z)$ kleineren Grad als der Divisor $(z - z_0)$, d.h. $R(z) = c$ ist ein konstantes Polynom. Somit ist

$$f(z) = (z - z_0)g(z) + R(z) = (z - z_0)g(z) + c$$

mit einer komplexen Zahl c. Speziell für $z = z_0$ erhalten wir die Beziehung

$$f(z_0) = c\,;$$

da z_0 eine Nullstelle von f ist, folgt $c = 0$ und

$$f(z) = (z - z_0)g(z)\,.$$

Damit ist $g(z)$ ein Polynom vom Grad $n - 1$, auf das wir die Induktionsvoraussetzung anwenden können:

$$g(z) = a(z - z_1)^{e_1}(z - z_2)^{e_2} \cdots (z - z_r)^{e_r}$$

mit $a, z_\nu \in \mathbb{C}$ und $e_1 + e_2 + \cdots + e_r = n - 1$ und

$$f(z) = a(z - z_0)(z - z_1)^{e_1}(z - z_2)^{e_2} \cdots (z - z_r)^{e_r}\,.$$

Unabhängig davon, ob z_0 gleich einem der anderen z_i ist oder nicht ist das eine Darstellung der verlangten Form, in der sich die Exponenten zu n ergänzen, und damit ist der Satz bewiesen. ■

Die Aussage über die Summe der Exponenten kann auch so interpretiert werden, daß ein komplexes Polynom vom Grad n mit Vielfachheiten gerechnet genau n Nullstellen hat.

Für reelle Polynome folgt:

Korollar: Jedes reelle Polynom $f(x)$ läßt sich schreiben als Produkt

$$f(x) = a(x - x_1)^{e_1} \cdots (x - x_r)^{e_r} q_1^{d_1} \cdots q_s^{d_s}$$

mit reellen Zahlen a, x_ν und quadratischen reellen Polynomen q_μ, die keine reelle Nullstellen haben. Dabei ist

$$\deg f = \sum_{\nu=1}^{r} e_\nu + 2\sum_{\mu=1}^{s} d_\mu\,.$$

Beweis: Über den komplexen Zahlen zerfällt f in Linearfaktoren. Die Linearfaktoren zu reellen Nullstellen können einfach übernommen werden. Im Falle einer komplexen Nullstelle z_μ ist, da f reelle Koeffizienten hat, auch $\overline{z_\mu}$ eine Nullstelle derselben Vielfachheit, und

$$q_\mu = (z - z_\mu)(z - \overline{z_\mu}) = z^2 - (2\,\mathfrak{Re}\, z_\mu)z + \left|z_\mu\right|^2$$

ist ein quadratisches Polynom mit reellen Koeffizienten, aber ohne reelle Nullstelle. ■

j) Der Residuensatz

Der CAUCHYsche Integralsatz gilt nicht für meromorphe Funktionen: Wie wir oben gesehen haben, liefert bereits $f(z) = 1/z$ ein Gegenbeispiel. In gewisser Weise ist das aber bereits das *einzige* Gegenbeispiel: Für $n \geq 2$ hat $1/z^n$ die Stammfunktion $1/(n-1)z^{n-1}$, und die ist auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert, d.h.

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^n} = 0$$

für jede geschlossene Kurve γ, die nicht durch 0 geht. Falls daher eine Funktion im durch γ begrenzten Bereich G nur eine einzige Polstelle z_0 hat und der Hauptteil dort gleich

$$H(z) \underset{\text{def}}{=} \sum_{k=-n}^{-1} a_k (z - z_0)^k$$

ist, können wir $f(z) = g(z) + H(z)$ zerlegen in diesen Hauptteil und eine in ganz G holomorphe Funktion $g(z)$. Nach dem CAUCHYschen Integralsatz ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma g(z)\,dz + \int_\gamma H(z)\,dz = \int_\gamma H(z)\,dz\,.$$

Dies läßt sich weiter ausrechnen als

$$\int_\gamma H(z) = \sum_{k=1}^{n} a_{-k} \frac{dz}{(z-z_0)^k} = a_{-1} \int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i a_{-1}\,.$$

Von daher ist klar, daß der Koeffizient a_{-1} eine besondere Rolle spielt und einen eigenen Namen verdient:

Definition: *a)* Für eine meromorphe Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ mit LAURENT-Reihe $\sum_{k=-n}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ um die Polstelle z_0 heißt der Koeffizient a_{-1} von $1/(z-z_0)$ das *Residuum* von f im Punkt z_0; in Zeichen

$$a_{-1} = \operatorname{Res}_{z_0} f\,.$$

Demnach ist also in der obigen Situation

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z_0} f\,.$$

Allgemein gilt der

Residuensatz: Die Funktion f sei meromorph in $D \subseteq \mathbb{C}$ und γ sei eine ganz in D liegende Kurve, die Rand eines beschränkten Gebiets G sei und auf der f keine Pole habe. Dann hat f in G nur endlich viele Polstellen $z_1, \dots, z_r$, und

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{r} \operatorname{Res}_{z_k} f\,.$$

Beweis: Der Abschluß $\overline{G}$ von G ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt; daher hat jede unendliche Teilmenge von $\overline{G}$ (mindestens) einen Häufungspunkt. Da die Polstellen einer meromorphen Funktion nach Definition keinen Häufungspunkt haben dürfen, kann es nur endlich viele Polstellen $z_1, \dots, z_r$ geben; die zugehörigen Hauptteile seien $H_1(z), \dots, H_r(z)$. Dann ist

$$g(z) \underset{\text{def}}{=} f(z) - H_1(z) - \cdots - H_r(z)$$

eine holomorphe Funktion, also ist nach dem CAUCHYschen Integralsatz

$$0 = \int_\gamma g(z)\,dz = \int_\gamma f(z) - \sum_{k=1}^{r} \int_\gamma H_k(z)\,dz$$

oder

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{r} \int_\gamma H_k(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{r} \operatorname{Res}_{z_k} f\,,$$

genau wie oben im Fall einer einzigen Polstelle. ■

Der Residuensatz kann ein sehr nützliches Hilfsmittel für die Berechnung von Integralen sein, da sich die Residuen im allgemeinen viel einfacher berechnen lassen, als ein Kurvenintegral: Da das Residuum im Punkt z_0 der Koeffizient von $(z-z_0)^{-1}$ ist, ist beispielsweise für einen Pol *erster* Ordnung das Residuum der konstante Term der TAYLOR-Reihe von $(z-z_0)f(z)$, also einfach

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z)\,.$$

Bei Polen höherer Ordnung divergiert dieser Ausdruck; wir können aber beispielsweise bei einem Pol n-ter Ordnung zunächst den Koeffizienten a_{-n} berechnen als

$$a_{-n} = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^n f(z)\,;$$

dann ist $f(z) - \dfrac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ eine meromorphe Funktion, die bei z_0 höchstens einen Pol der Ordnung $n-1$ hat und deren LAURENT-Koeffizienten abgesehen von a_{-n} mit denen von f übereinstimmen.

Auf diese Weise läßt sich rekursiv der Hauptteil von f berechnen, was meist erheblich einfacher ist als die Auswertung der Integraldarstellungen der Koeffizienten.

Als erste Anwendung des Residuensatzes betrachten wir

$$\int_\gamma \frac{z^5+1}{z^4-1}\,dz \quad \text{für } \gamma\colon \begin{cases} [0,2\pi] \to \mathbb{C} \\ \qquad t \mapsto 2e^{it} \end{cases}.$$

Der Nenner hat die vier Nullstellen ± 1 und $\pm i$, die allesamt im Innern des Kreises mit Radius zwei um den Nullpunkt liegen, über den wir integrieren. $z = -1$ ist allerdings auch Nullstelle des Zählers, und

$$\lim_{z\to -1} \frac{z^5+1}{z^4-1} = \lim_{z\to -1} \frac{5z^4}{4z^3} = \lim_{z\to -1} \frac{5z}{4} = -\frac{5}{4}$$

existiert in $\mathbb{C}$; Pole gibt es also nur für $+1$ und $\pm i$. Diese Pole haben allesamt Ordnung eins, da es sich um einfache Nullstellen des Nenners handelt. Also ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_1 f &= \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{(z^5+1)(z-1)}{(z+1)(z-1)(z^2+1)} \\ &= \lim_{z\to 1} \frac{z^5+1}{(z+1)(z^2+1)} = \frac{2}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Genauso bestimmt man

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_i f &= \lim_{z\to i} \frac{z^5+1}{(z^2-1)(z+i)} \\ &= \frac{i^5+1}{(i^2-1)(i+i)} = \frac{i+1}{-4i} = \frac{-1+i}{4} \end{aligned}$$

und

$$\operatorname{Res}_{-i} f = \frac{(-i)^5+1}{\big((-i)^2-1\big)(-i-i)} = \frac{1-i}{-2\cdot(-2i)} = \frac{-1-i}{4}.$$

Die Summe der drei Residuen ist Null, also verschwindet nach dem Residuensatz auch das Integral.

Man beachte, daß wir dieses Ergebnis nicht ohne weiteres über eine Stammfunktion bekommen hätten, denn die Stammfunktion

$$\frac{z^2}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{Ln}(z-1) - \frac{1}{4}\operatorname{Ln}(z^2+1) - \frac{1}{2}\arctan z$$

ist gleich an mehreren Stellen des Integrationswegs unstetig: Für $z = -2$ überquert das Argument von $\operatorname{Ln}(z-1)$ die negative reelle Achse, und für $z = \pm 2i$ das von $\operatorname{Ln}(z^2+1)$. Auch läßt sich der Arkustangens nicht als holomorphe Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ definieren und sorgt so für zusätzliche Probleme.

Auf den ersten Blick erstaunlich, gerade für Anwendungen in der Elektrotechnik aber wichtig ist die Tatsache, daß sich auch eine ganze Reihe von bestimmten Integrale im Reellen am einfachsten über den Residuensatz berechnen lassen. Betrachten wir etwa als erstes Beispiel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}.$$

Natürlich können wir via Partialbruchzerlegung eine Stammfunktion des Integranden finden, allerdings müssen wir dafür doch einiges arbeiten, und das Ergebnis

$$\begin{aligned} F(x) = {}& \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}\,x+1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1} \\ & + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}\,x+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}\,x-1) \end{aligned}$$

ist alles andere als angenehm.

Um auch dieses Integral über den Residuenkalkül ausrechnen zu können, setzen wir den Integranden fort zu einer komplexen Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^4+1};$$

diese ist holomorph in allen Punkten $z \in \mathbb{C}$, in denen der Nenner z^4+1 nicht verschwindet.

Nach der dritten binomischen Formel ist $(z^4+1)(z^4-1) = (z^8-1)$, also

$$z^4 + 1 = \frac{z^8-1}{z^4-1}\,.$$

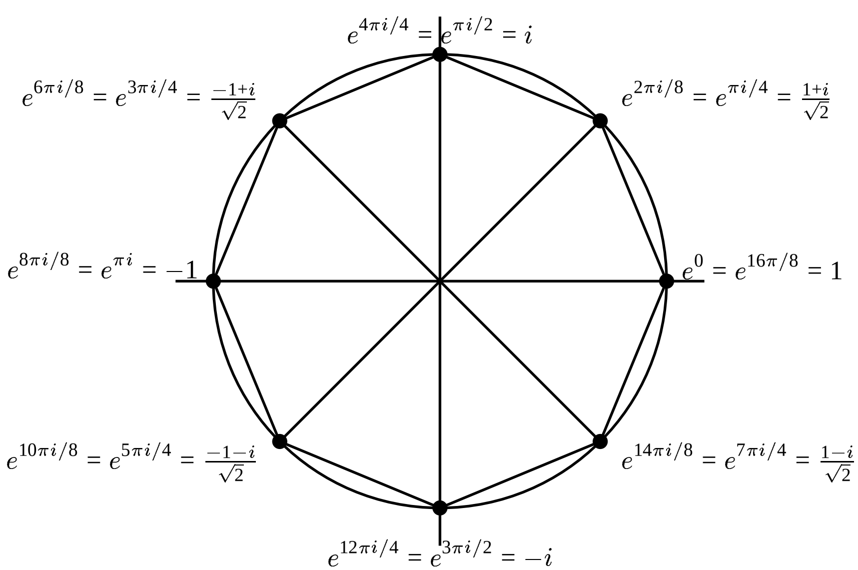
Die Nullstellen des Polynoms $z^n - 1$ sind jene komplexen Zahlen, deren n-te Potenz gleich Eins ist; man bezeichnet sie als die n-ten Einheitswurzeln. Da ein Polynom vom Grad n über einem Körper höchstens n Nullstellen haben kann, kann es höchstens n von ihnen geben; da für jede natürliche Zahl k

$$\left(e^{2k\pi i/n}\right)^n = e^{n\cdot 2k\pi i/n} = e^{2k\pi i} = 1$$

ist, gibt es genau die n Einheitswurzeln

$$1 = e^0, \quad e^{2k\pi i/n}, \quad e^{4k\pi i/n}, \quad \dots, \quad e^{(n-1)\cdot 2\pi i/n}\,.$$

Auf dem Einheitskreis sind sie die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks, was die folgende Zeichnung für den Fall $n = 8$ illustriert:



Ist m ein Teiler von n, so ist jede m-te Einheitswurzel erst recht eine m-ten Einheitswurzeln; wir bezeichnen eine n-te Einheitswurzel als *primitiv*, wenn es keinen echten Teiler m von n gibt, für den sie bereits m-te Einheitswurzel ist.

Eine achte Einheitswurzel ist offenbar genau dann primitiv, wenn sie nicht gleichzeitig vierte Einheitswurzel ist; die Nullstellen von z^4+1 sind also genau die primitiven achten Einheitswurzeln

$$e^{\pi i/4}, \quad e^{3\pi i/4}, \quad e^{5\pi i/4} \quad \text{und} \quad e^{7\pi i/4}\,.$$

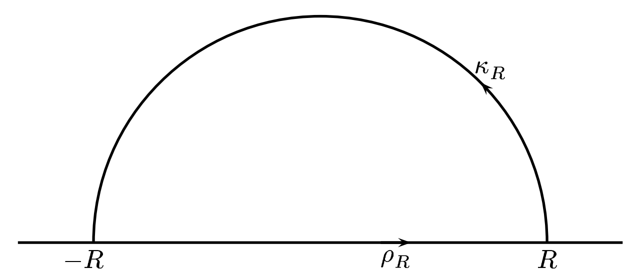
Wir betrachten nun für $R > 1$ einen Integrationsweg γ_R, der zusammengesetzt ist aus dem eigentlich interessierenden reellen Integrationsweg

$$\rho_R\colon \begin{cases} [-R,R] \to \mathbb{C} \\ \qquad t \mapsto t \end{cases}$$

von $-R$ bis R und einem Halbkreis

$$\kappa_R\colon \begin{cases} [0,\pi] \to \mathbb{C} \\ \quad t \mapsto Re^{it} \end{cases}$$

in der oberen Halbebenen von $\mathbb{C}$, der von R im Gegenuhrzeigersinn nach $-R$ führt.



Beides zusammen bildet eine geschlossene Kurve, und Polstellen des Integranden gibt es nur bei den primitiven achten Einheitswurzeln, von denen allerdings nur $e^{\pi i/4}$ und $e^{3\pi i/4}$ im Halbkreis liegen. Nach dem

Residuensatz ist daher für $R > 1$

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i\left(\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f + \operatorname{Res}_{e^{3\pi i/4}} f\right).$$

Die Residuen lassen sich wie oben bestimmen, beispielsweise ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f &= \lim_{z\to e^{\pi i/4}} \frac{z-e^{\pi i/4}}{z^4+1}\\ &= \lim_{z\to e^{\pi i/4}} \frac{z-e^{\pi i/4}}{(z-e^{\pi i/4})(z+e^{\pi i/4})(z-e^{3\pi i/4})(z+e^{3\pi i/4})}\\ &= \frac{1}{2e^{\pi i/4}(e^{\pi i/4}-e^{3\pi i/4})(e^{\pi i/4}+e^{3\pi i/4})}\\ &= \frac{1}{2e^{\pi i/4}(e^{\pi i/2}-2e^{3\pi i/2})}\\ &= \frac{1}{2e^{\pi i/4}\big(i-(-i)\big)} = \frac{e^{-\pi i/4}}{4i} = \frac{\frac12(\sqrt2-\sqrt2\, i)}{4i}\\ &= \frac{\sqrt2}{8}(-1-i)\,,\end{aligned}$$

und genauso könnte man auch

$$\operatorname{Res} e^{\pi i/4} f = \frac{\sqrt2}{8}(1-i)$$

berechnen. Einfacher geht es allerdings zumindest in diesem Fall mit der Regel von DE L'HOSPITAL: Danach ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f &= \lim_{z\to e^{\pi i/4}} \frac{z-e^{\pi i/4}}{z^4+1}\\ &= \lim_{z\to e^{\pi i/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4e^3\pi i/4} = \frac14 e^{-3\pi i/4}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{e^{3\pi i/4}} f &= \lim_{z\to e^{3\pi i/4}} \frac{z-e^{3\pi i/4}}{z^4+1}\\ &= \lim_{z\to e^{3\pi i/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4e^9\pi i/4} = \frac14 e^{-9\pi i/4} = \frac14 e^{-\pi i/4}\,.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f + \operatorname{Res}_{e^{3\pi i/4}} f = \frac{e^{-3\pi i/4}+e^{-\pi i/4}}{4}\,.$$

Um dies weiter auszurechnen kann man entweder, in diesem Fall sehr einfach, die Polarkoordinatendarstellungen $e^{-3\pi i/4}$ und $e^{-\pi i/4}$ verwenden, oder aber man versucht, die Summe über die EULERschen Formeln als trigonometrische Funktion zu interpretieren:

$$\begin{aligned}\frac{e^{-3\pi i/4}+e^{-\pi i/4}}{4} &= e^{-\pi i/2}\cdot\frac{e^{-\pi i/4}+e^{\pi i/4}}{4} = \frac{e^{-\pi i/2}}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\\ &= -\frac{i}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2} = -\frac{i\sqrt2}{4}\end{aligned}$$

Damit ist also

$$\int_{\gamma_R}\frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i\left(\operatorname{Res} e^{\pi i/4} f + \operatorname{Res}_{e^{3\pi i/4}} f\right) = \pi\frac{\sqrt2}{2}\,.$$

Für alle, die noch nie einen Beweis der DE L'HOSPITALschen Regel gesehen haben, hier zunächst eine einfache Version:

Verschwinden für zwei stetig differenzierbare Funktionen $g, h\colon U \to \mathbb{R}$ für $x_0 \in U$ sowohl $f(x_0)$ als auch $g(x_0)$, nicht aber $g'(x_0)$, so ist

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)}\,.$$

Zum *Beweis* benötigen wir lediglich die Definition der Differenzierbarkeit:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} = \lim_{h\to0}\frac{f(x_0)+hf'(x_0)+o(h)}{g(x_0)+hg'(x_0)+o(h)}\\ &= \lim_{h\to0}\frac{f'(x_0)+o(h)/h}{g'(x_0)+o(h)/h} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\,.\end{aligned}$$

Tatsächlich gilt sogar etwas mehr: Wir können die Regel, hinreichend häufige Differenzierbarkeit vorausgesetzt, auch mehrfach anwenden, denn wir haben auch folgende Verschärfung: Verschwinden für zwei stetig differenzierbare Funktionen $g, h\colon U \to \mathbb{R}$ für $x_0 \in U$ sowohl $f(x_0)$ als auch $g(x_0)$, so ist

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)}\,.$$

Der *Beweis* ist im wesentlichen derselbe, allerdings müssen wir etwas genauer rechnen und den *Mittelwertsatz der Differentialrechnung* anwenden: Danach gibt es zu jedem x reelle Zahlen η_x, ζ_x zwischen x_0 und x, so daß gilt

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(\eta_x) \quad\text{und}\quad g(x_0+h) = g(x_0) + (x-x_0)g'(\zeta_x)\,.$$

Daher können wir auch schreiben

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)+(x-x_0)f'(\eta_x)}{g(x_0)+(x-x_0)g'(\zeta_x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)f'(\eta_x)}{(x-x_0)g'(\zeta_x)}$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f'(\eta_x)}{g'(\zeta_x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

denn $\lim_{x\to x_0}\eta_x = \lim_{x\to x_0}\zeta_x = x_0$.

Was uns wirklich interessiert ist allerdings nicht das Integral über γ_R, sondern das über ρ_R. Wir können es aus dem über γ_R berechnen, wenn wir das Integral über den Halbkreisbogen κ_R kennen. Dieses Integral kennen wir zwar nicht, aber wir wissen, daß es für $R\to\infty$ gegen Null geht, denn

$$\int_{\kappa_R}\frac{dz}{z^4+1} = \int_0^\pi \frac{iRe^{it}}{R^4e^{4it}+1}\,dt\,,$$

und der Integrand rechts geht für $R\to\infty$ überall gegen Null, also auch das Integral über das endliche Intervall $[0,\pi]$. Somit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{z^4+1} = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dz}{z^4+1}$$
$$= \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{dz}{z^4+1} - \lim_{R\to\infty}\int_{\kappa_R}\frac{dz}{z^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\,.$$

Ähnlich kann man bei anderen uneigentlichen Integralen vorgehen, vorausgesetzt der Integrand hat keine Polstellen auf der reellen Achse, die Residuen der Polstellen in der oberen Halbebene sind bekannt und für das Integral über den Halbkreisbogen κ_R kann zumindest der Grenzwert für $R\to\infty$ bestimmt werden.

Letzteres ist zumindest für rationale Integranden kein Problem, falls der Nenner um mindestens zwei größeren Grad als der Zähler hat:

Lemma: Für zwei Polynome $P(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$ und $Q(z) = b_mz^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_1z + b_0$ mit $m \ge n+2$ ist für κ_R wie oben $\lim_{R\to\infty}\int_{\kappa_R}\frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 0$, und falls Q keine reellen Nullstellen hat ist $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ gleich $2\pi i$ mal der Summe der Residuen von $\frac{P(z)}{Q(z)}$ an den Polstellen mit positivem Imaginärteil.

Beweis: Wir können argumentieren wie im obigen Beispiel:

$$\int_{\kappa_R}\frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = \int_0^\pi \frac{P(Re^{it})}{Q(e^{it})}\cdot iRe^{it}\,dt$$
$$= i\int_0^\pi \frac{a_nR^{n+1}e^{i(n+1)t} + a_{n-1}R^{n-1}e^{int} + \cdots + a_1R^2e^{2it} + a_0Re^{it}}{b_mR^me^{imt} + b_{m-1}R^{m-1}e^{i(m-1)t} + \cdots + b_1Re^{it} + b_0}\,dt\,,$$

und der Integrand rechts geht für $R\to\infty$ überall gegen Null, da der Grad $n+1$ des Zählers kleiner ist als der Grad m des Nenners. Da der Nenner nur endlich viele Nullstellen hat, liegen genau die mit positivem Imaginärteil für hinreichend große R im Innern eines jeden Halbreises mit Radius R um Null in der oberen Halbebene. ■

Genauso kann man natürlich mit der unteren Halbebene argumentieren; man muß dabei nur beachten, daß der geschlossene Integrationsweg dann *im Uhrzeigersinn* durchlaufen wird, so daß der Wert des Integrals dann $-2\pi i$ mal der Residuensumme ist.

Ob man im konkreten Fall lieber mit der oberen oder der unteren Halbebene arbeitet, wird in erster Linie davon abhängen, wo man die Residuen einfacher bestimmen kann; im Zweifelsfall wird man die Halbebene wählen, in der weniger Polstellen liegen. Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß die obige Methode nicht anwendbar ist, wenn der Integrand Nullstellen auf der reellen Achse selbst hat, denn wir wissen nicht, wie man ein komplexes Integral berechnet, dessen Integrand auf dem Integrationsweg eine Polstelle hat.

Gelegentlich läßt sich ein reelles Integral auch über eine direkte Substitution in ein komplexes Integral über eine geschlossene Kurve überführen, beispielsweise kann ein Integral von 0 bis 2π über einen Ausdruck in $\sin t$ und $\cos t$ manchmal direkt als komplexes Integral über eine Kreislinie interpretiert und dann nach dem Residuensatz ausgerechnet werden; wie man solche Substitutionen findet, ist wie üblich Erfahrungssache, auch wenn es dazu einige Faustregeln gibt.

Als ein Beispiel dazu betrachten wir das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx\,,$$

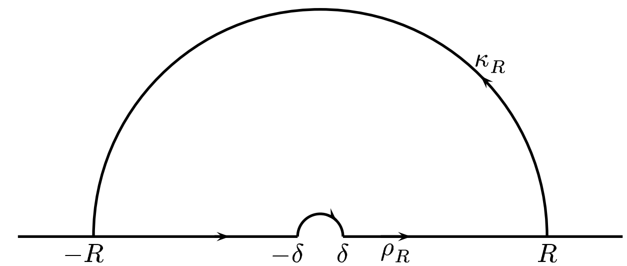
das wir beispielsweise bei der Untersuchung der Konvergenz von FOURIER-Reihen benötigen werden. Es hat auch sonst viele Anwendungen, denn der Integrand, die sogenannte sinc-Funktion spielt in der Elektrotechnik eine große Rolle als, wie wir im entsprechenden Teil der Vorlesung sehen werden, FOURIER-Transformierte eines Rechteckimpulses.

Da wir $\dfrac{\sin z}{z}$ auf einem Kreis um den Nullpunkt für immer größer werdenden Radius nicht abschätzen können, hat es keinen Sinn, das Integral über einen Halbkreis zu berechnen – ganz abgesehen davon, daß es wegen der Holomorphie des Integranden ohnehin verschwindet.

Wie sich zeigen wird, kommen wir ans Ziel, wenn wir den CAUCHYschen Hauptwert des etwas allgemeineren Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t}\,dt$$

für ein reelles $\omega > 0$ berechnen, wobei im Augenblick nur der Fall $\omega = 1$ interessant ist. Dazu betrachten wir, der Philosophie dieses Abschnitts entsprechend, ein komplexes Kurvenintegral über $e^{i\omega z}/z$. Da der Integrand an der Stelle $z = 0$ eine Polstelle hat, können wir allerdings nicht einfach auf der reellen Achse von $-R$ nach R integrieren, sondern müssen den Nullpunkt auf einem kleinen Halbkreisbogen β_δ vom Radius δ umfahren. Diese Umleitung wird im Uhrzeigersinn durchlaufen:



Für $z = x + iy$ hat $e^{i\omega z} = e^{-\omega y}e^{i\omega x}$ Betrag $e^{-\omega y}$. Damit ist

$$\left|\int_{\kappa_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} \cdot iRe^{it}\,dt\right| \le \int_0^{\pi} \left|\frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} \cdot iRe^{it}\right| dt$$
$$= \int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\,dt\,.$$

Um die rechte Seite weiter abzuschätzen, wählen wir ein $\eta > 0$ und schreiben

$$\int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\,dt = \int_0^{\eta} e^{-R\sin t}\,dt + \int_{\eta}^{\pi-\delta} e^{-R\sin t}\,dt + \int_{\pi-\eta}^{\pi} e^{-R\sin t}\,dt\,.$$

Im ersten und im drittem Integral schätzen wir den Integranden ab durch eins und erhalten somit η als obere Schranke für das Integral; beim mittleren Integral ist der Integrand höchstens gleich $e^{-R\sin\eta}$. Wählen wir nun für ein $\varepsilon > 0$ den Winkel δ so, daß $\eta < \frac{1}{3}\varepsilon$ ist, und wählen wir dazu den Radius R so groß, daß

$$e^{-R\sin\eta} < \frac{\varepsilon}{3\pi}$$

ist, erhalten wir die Abschätzung

$$\left|\int_{\kappa_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| \le 2\eta + (\pi - 2\eta)\,e^{-R\sin\eta} < \varepsilon\,.$$

Somit verschwindet auch hier das Integral längs κ_R für $R \to \infty$.

Für $R \to \infty$ verschwindet damit auf Grund des CAUCHYschen Integralsatzes auch

$$\int_{-\infty}^{\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z}\,dz + \int_{\beta_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z}\,dz + \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{i\omega z}}{z}\,dz$$

d.h. der CAUCHYsche Hauptwert des Integrals von $-\infty$ nach ∞ ist gleich

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{\alpha_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z}\,dz\,,$$

wobei α_δ den im *Gegenuhrzeigersinn* durchlaufenen Halbkreisbogen β_δ bezeichnet. In der Summenentwicklung

$$\int_{\alpha_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z} = \int_{\alpha_\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^k z^{k-1}}{k!}\,dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^k}{k!} \int_{\alpha_\delta} z^{k-1}\,dz$$

ist das rechtsstehende Integral für $k = 0$

$$\int_{\alpha_\delta} z^{-1}\,dz = \mathrm{Ln}(\delta) - \mathrm{Ln}(-\delta) = \mathrm{Ln}(-1) = -\pi i$$

unabhängig von δ; im Falle $k \neq 0$ verschwindet

$$\int_{\alpha_\delta} z^{k-1}\,dz = \frac{\delta^k - (-\delta)^k}{k}$$

für gerade k und ist gleich $2\delta^k/k$ für ungerade k. Da die geometrische Reihe $2\sum_{k=1}^{\infty}\delta^k$ eine konvergente Majorante der Summe aller solcher Terme ist und für $\delta \to 0$ gegen Null geht, folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t}\,dt = \lim_{\delta\to 0} \int_{\alpha_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z}\,dz = \pi i\,.$$

Vergleich der Imaginärteile zeigt, daß dann für den CAUCHYschen Hauptwert gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega t}{t}\,dt = \pi \quad \text{für alle } \omega > 0\,.$$

Tatsächlich kann man sich leicht überlegen, daß dies nicht nur der CAUCHYsche Hauptwert ist, sondern daß dieses uneigentliche Integral existiert und somit den Wert π hat.

k) Harmonische Funktionen

Wie wir gesehen haben, ist (stetige) Differenzierbarkeit im Komplexen eine erheblich stärkere Forderung ist als im Reellen. Die vielen schönen Eigenschaften einer holomorphen Funktion sollten ihre Auswirkungen auf deren Real- und Imaginärteil haben, reelle Funktionen, die als Real- oder Imaginärteil einer holomorphen Funktion aufgefaßt werden können, sollten also interessante analytische Eigenschaften haben. Beispielsweise ist eine holomorphe Funktion beliebig oft stetig differenenzierbar; also gilt dies auch für ihren Real- und Imaginärteil.

Wenn die zweifach differenzierbare Funktion $u(x,y)$ Realteil einer holomorphen Funktion ist und $v(x,y)$ der zugehörige Imaginärteil, so ist nach den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) \quad \text{und} \quad u_y(x,y) = -v_x(x,y)\,,$$

also folgt nach dem Lemma von SCHWARZ, daß

$$u_{xx}(x,y) = v_{yx}(x,y) = v_{xy}(x,y) = -u_{yy}(x,y)\,,$$

d.h.

$$\Delta u(xy) = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) \equiv 0\,.$$

Der LAPLACE-Operator, angewandt auf den Realteil einer holomorphen Funktion, liefert also die Nullfunktion.

Die Gleichung $\Delta u = 0$ dürfte den meisten aus der Physik in Erinnerung sein: Ist u ein elektrisches Potential und $\vec{E} = \nabla u$ das zugehörige elektrische Feld, so ist $\Delta u = \operatorname{div} E$, die sogenannte *Kontinuitätsgleichung*

$\Delta u = 0$ besagt somit, daß ∇u ein quellenfreies Feld ist; es gibt also keine Ladungen.

Solche Funktionen spielen nicht nur in der Elektrodynamik eine Rolle, sondern beispielsweise auch bei der Wärmeleitung und einer ganze Reihe weiterer Anwendungen; sie haben daher einen eigenen Namen verdient (und eine umfangreiche Theorie, die sich mit ihren Eigenschaften beschäftigt).

Definition: Eine Funktion $u \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$ heißt *harmonisch* auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn dort überall gilt

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 .$$

Im Zweidimensionalen hängt dies eng mit holomorphen Funktionen zusammen:

Lemma: *a)* Realteil und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind harmonisch.
b) Zu jeder harmonischen Funktion $u: D \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt es für jeden Punkt $(a, b) \in D$ eine Umgebung U und eine auf U holomorphe Funktion $f: U \to \mathbb{C}$, so daß u auf U der Realteil von f ist.

Beweis: a) Wir haben bereits nachgerechnet, daß der Realteil einer holomorphen Funktion f harmonisch ist; da mit f auch $-if$ holomorph ist und den Imaginärteil von f als Realteil hat, gilt dasselbe für den Imaginärteil.

b) Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} -u_y(x, y) \\ u_x(x, y) \end{pmatrix}$$

auf einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $U \subseteq D$, die den Punkt (a, b) enthält, z.B. eine Kreisscheibe um (a, b), die noch ganz in D liegt. Da

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x} = -u_{yy} - u_{xx} = -\Delta u = 0$$

auf U identisch verschwindet, hat das Vektorfeld $\vec{V}$ nach dem zweidimensionalen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus Kap. II, §6*f)*, eine Stammfunktion; es gibt also eine Funktion $v: U \to \mathbb{R}$ mit

$$v_x = V_1 = -u_y \quad \text{und} \quad v_y = V_2 = u_x .$$

Damit erfüllt das Paar (u, v) die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen; und da die Ableitungen der zweimal stetig differenzierbaren Funktion u natürlich stetig ist, ist

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

holomorph auf U mit u als Realteil. ∎

Als Beispiel, wie Sätze über holomorphe Funktionen auf harmonische Funktionen zweier Veränderlicher übertragen werden können, sei hier nur die Mittelwerteigenschaft erwähnt:

Satz: $u(x, y)$ sei harmonisch auf einem Gebiet G, das die offene Kreisscheibe D vom Radius r um (x_0, y_0) enthalte. Dann ist

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)\, dt$$

der Mittelwert der auf der Kreislinie angenommenen Werte.

Beweis: Wie wir bereits wissen, gibt es eine holomorphe Funktion f, die u als Realteil hat. Mit $z = x + iy$ kann die CAUCHYsche Integralformel als eine Mittelwertaussage für f interpretiert werden: Für den Integrationsweg $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto z_0 + re^{it}$ ist

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{z - z_0}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi i} \frac{f(w + re^{it})}{re^{it}} \cdot ire^{it}\, dt$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + re^{it})\, dt$$

gleich dem Mittelwert der Funktion $f(z_0 + re^{it})$ über die Kreislinie. Nimmt man auf beiden Seiten den Realteil, folgt die Behauptung. ∎