Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, C201

15. März 2006

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Schreiben Sie $f(z) = \sin^4 z - \cos^4 z$ als Summe reiner Sinus- und Kosinusterme!

Lösung: Stur nach Schema F erhält man

$$\begin{aligned}\sin^4 z - \cos^4 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^4 - \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^4\\ &= \frac{e^{4iz} - 4e^{2iz} + 6 - 4e^{-2iz} + e^{-4iz}}{16} - \frac{e^{4iz} + 4e^{2iz} + 6 + 4e^{-2iz} + e^{-4iz}}{16}\\ &= -\frac{e^{2iz} + e^{-2iz}}{2} = -\cos 2z\,.\end{aligned}$$

Wendet man zunächst die dritte binomische Formel an, erhält man dasselbe Ergebnis etwas billiger:

$$\begin{aligned}\sin^4 z - \cos^4 z &= (\sin^2 z + \cos^2 z)(\sin^2 z - \cos^2 z) = \sin^2 z - \cos^2 z\\ &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 - \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = -\frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4} - \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4}\\ &= -\frac{e^{2iz} + e^{-2iz}}{2} = -\cos 2z\,.\end{aligned}$$

2) Was ist $\operatorname{Res}_{z=0} \dfrac{\cos z}{z^3}$?

Lösung: $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^4}{4!} - \dfrac{z^6}{6!} + \cdots$, also ist $\dfrac{\cos z}{z^3} = \dfrac{1}{z^3} - \dfrac{1}{2z} + \dfrac{z}{4!} - \dfrac{z^3}{6!} + \cdots$. Das Residuum an der Stelle $z = 0$ ist der Koeffizient von $1/z$ in dieser Reihe, also $-\frac{1}{2}$.

3) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.

Lösung: *Richtig:* A ist eine Dreiecksmatrix, die Eigenwerte sind also einfach die Einträge in der Diagonale. Da diese alle verschieden sind, hat jeder Eigenwert die algebraische und somit auch geometrische Vielfachheit eins, und die Summe der geometrischen Vielfachheiten ist drei.

4) *Richtig oder falsch:* Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermitesch, so ist e^A diagonalisierbar.

Lösung: *Richtig,* denn dann ist A diagonalisierbar, d.h. es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}^n$, bezüglich derer A Diagonalgestalt hat, und bezüglich dieser Basis hat natürlich auch e^A Diagonalgestalt, da e hoch eine Diagonalmatrix wieder eine Diagonalmatrix ist und die Bildung der Exponentialfunktion mit Basiswechsel vertauschbar ist.

5) Ein Meßinstrument kann Spannungen im Bereich von etwa einem Volt mit einer Genauigkeit von $\pm 0{,}02\,\mathrm{V}$ messen. Wie können Sie damit eine Spannung trotzdem mit einer Genauigkeit von $\pm 0{,}01\,\mathrm{V}$ bestimmen?

Lösung: Mißt man n Mal und bildet den Mittelwert, ist dieser nur noch mit dem durch $\sqrt{n}$ dividierten Fehler behaftet. Mit $n = 4$ erreicht man daher die gewünschte Genauigkeit.

6) X und Y seien zwei Zufallsvariable, deren Verteilung die Standardnormalverteilung ist. Welche Verteilung hat $X + Y$?

Lösung: Der Erwartungswert von $X + Y$ bleibt null, die Standardabweichung ist nach dem Fehlerfortplfanzungsgesetz $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Die Verteilung ist wieder eine Normalverteilung, denn die FOURIER-Transformierte der Verteilungsdichte ist die Faltung der FOURIER-Transformierten der Verteilungsdichten von X und Y.

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$ mit Hilfe des Residuensatzes!

Lösung: Da der Grad des Zählers um zwei kleiner ist als der des Nenners, ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} = \lim_{R\to\infty} \int_{\delta_R} \frac{dz}{z^2 - 4z + 5}$$

für den folgenden Integrationsweg δ_R: Für reelles $R > 0$ sei zunächst γ_R der Halbkreis um den Nullpunkt vom Punkt R durch die obere Halbebene zum Punkt $-R$; in Formeln also

$$\gamma_R\colon [0, \pi] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto Re^{it}.$$

δ_R ist dann der Integrationsweg, der mit γ_R beginnt und dann entlang der reellen Achse von $-R$ nach R geht. Damit ist δ_R eine geschlossene Kurve, und Integrale entlang δ_R können nach dem Residuensatz berechnet werden.
$z^2 - 4z + 5 = (z-2)^2 + 1$ verschwindet für $z = 2 \pm i$; für $R > \sqrt{5}$ liegt $z_1 2 + i$ im Innern des Halbkreises, während $z_2 = 2 - i$ unter der reellen Achse und damit für kein R im Halbkreis liegt. Offensichtlich hat z_1 (wie auch z_2) als Nullstelle des Nenners die Ordnung eins, das Residuum kann daher einfacher als via Partialbruchzerlegung berechnet werden als Grenzwert

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{z=2+i} \frac{1}{z^2 - 4z + 5} &= \lim_{z\to 2+i} \frac{z - (2+i)}{z^2 - 4z + 5} = \lim_{z\to 2+i} \frac{1}{z - (2-i)} \\ &= \frac{1}{(2+i) - (2-i)} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}.\end{aligned}$$

Nach dem Residuensatz ist daher für $R > \sqrt{5}$

$$\int_{\delta_R} \frac{dz}{z^2 - 4z + 5} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=2+i} \frac{1}{z^2 - 4z + 5} = \pi.$$

Das ist auch der Wert des gesuchten Integrals, denn für $R \to \infty$ verschwindet das Integral über γ_R, da der Zählergrad um zwei kleiner ist als der Nennergrad, und das Integral von $-R$ bis R konvergiert gegen das Integral von $-\infty$ bis ∞.

b) Läßt sich auch $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2 - 4x + 5}$ so berechnen? (Nach dem Wert des Integrals ist nicht gefragt!)

Lösung: Nein, denn in diesem Fall hat der Zähler nur einen um eins geringeren Grad als der Nenner, das Integral über γ_R muß daher nicht für $R \to \infty$ verschwinden.
(Berechnet man mit den üblichen Integrationsmethoden die Stammfunktion

$$\int \frac{x\,dx}{x^2 - 4x + 5} = \frac{1}{2}\ln(x^2 - 4 * x + 5) + 2\arctan(x - 2)\,,$$

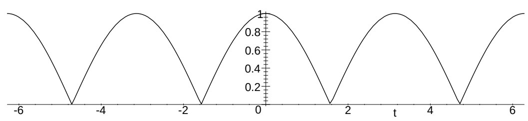
so sieht man, daß das obige Integral nicht existiert, da sein Wert von der Art des Grenzübergangs abhängt: Beispielsweise ist

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{\lambda a} \frac{x\,dx}{x^2 - 4x + 5} = \ln\lambda + 2\pi\,.)$$

Aufgabe 2: *(7 Punkte)*

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(t) = |\cos t|$ über dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$!

Lösung:



b) Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?

Lösung: f ist gerade.

c) Welche Periode und welche Kreisfrequenz ω hat f ?

Lösung: Wegen des Betrags hat f nur die halbe Periode des Kosinus, also nur π. Damit ist $\omega = 2$. Es empfiehlt sich, im folgenden mit dem Periodenintervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ zu arbeiten, denn dort ist der Kosinus gleich seinem Betrag, so daß wir auf die Betragsstriche verzichten können.

d) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f !

Lösung: Da f eine gerade Funktion ist, gibt es keine Sinusterme.
Der konstante Term ist das Periodenmittel

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\,dt = \frac{\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\pi} = \frac{2}{\pi}\,.$$

Der Koeffizienten a_k von $\cos k\omega t = \cos 2kt$ für $k \geq 1$ sind

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)\cos 2kt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\cos kt\,dt\,.$$

Über die EULERschen Formeln läßt sich der Integrand auf besser zur Bestimmung der Stammfunktion geeignete Form bringen:

$$\begin{aligned}\cos t\cos 2kt &= \frac{e^t + e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^{2kt} + e^{-2kt}}{2} = \frac{e^{(2k+1)t} + e^{-(2k+1)t} + e^{(2k-1)t} + e^{-(2k-1)t}}{4}\\ &= \frac{1}{2}\big(\cos(2k+1)t + \cos(2k-1)t\big)\,.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(2k+1)t}{2k+1} + \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{2k+1} + \frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}{2k-1}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{(-1)^k}{2k+1} + \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right) = \frac{2}{\pi}\cdot(-1)^k\cdot\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot(-1)^k\cdot\frac{-2}{(2k+1)(2k-1)} = \frac{4}{\pi}\cdot(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{4k^2-1}
\end{aligned}$$

und die FOURIER-Reihe von f ergibt sich als

$$S_f(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos 2kt\,.$$

e) Wo tritt bei der Konvergenz dieser FOURIER-Reihe das GIBBS-Phänomen auf, und wohin konvergiert die Reihe an diesen Punkten?

Lösung: Da f stetig ist, tritt nirgends das GIBBS-Phänomen auf, und die Reihe konvergiert überall gegen den Funktionswert.

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)

a) Berechnen Sie für $a > 1$ die FOURIER- und die LAPLACE-Transformierte der Funktion $f_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 1 \le t \le a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$! Wie verhalten sie sich für $a \to \infty$?

Lösung: Die FOURIER-Transformierte ist

$$\widehat{f}_a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_1^a e^{-i\omega t} = \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\bigg|_1^a = \frac{i}{\omega}\left(e^{-i\omega a} - e^{-i\omega}\right).$$

Da $e^{-i\omega a}$ eine periodische Funktion von a ist, existiert kein Grenzwert für $a \to \infty$.
Die LAPLACE-Transformierte ist

$$\mathcal{L}\{f_a(t)\}(s) = \int_0^{\infty} f_a(t)e^{-st}\,dt = \int_1^a e^{-st}\,dt = \frac{e^{-sa} - e^{-s}}{-s} = \frac{e^{-s} - e^{-sa}}{s}\,.$$

Für $a \to \infty$ und $\Re e\, s > 0$ geht e^{-sa} gegen null, der Grenzwert von $\mathcal{L}\{f_a(t)\}(s)$ existiert also und ist e^{-s}/s, die LAPLACE-Transformierte von $1 = t^0$ *(vgl. Formelsammlung).*

b) ditto für $f_a * f_a$!

Lösung: Da beide Transformationen Faltungen in Produkte überführen, ist das jeweils das Quadrat der in *a)* berechneten Funktionen, also

$$-\frac{(e^{-i\omega a} - e^{-i\omega})^2}{\omega^2} \quad \textit{bzw.} \quad \frac{(e^{-s} - e^{-as})^2}{s^2}\,.$$

c) Welche Ableitung hat f_a im Distributionensinne? (Es genügt, das Ergebnis in Funktionenschreibweise mit δ anzugeben.)

Lösung: Für alle $t \notin \{1, a\}$ ist f_a differenzierbar mit Ableitung null; bei $t = 1$ haben wir einen Sprung um $+1$, bei $t = a$ und -1. Die Ableitung im Distributionensinne ist also $\delta(t-1) - \delta(t-a)$.

Aufgabe 4: *(10 Punkte)*

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

Lösung: Zur Berechnung des charakteristischen Polynoms entwickeln wir natürlich nach der zweiten Zeile:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -6 \\ 2 & 1-\lambda & 5 \\ 1 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\big((-1-\lambda)(4-\lambda)+6\big) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \\ &= (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2)\,, \end{aligned}$$

denn $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ hat, wie man entweder nach VIÈTE oder nach einer Lösungsformel für quadratische Gleichungen leicht nachrechnet, die Nullstellen $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$. Somit hat A die Eigenwerte $\lambda = 1$ mit algebraischer Vielfachheit zwei und $\lambda = 2$ mit algebraischer und damit auch geometrischer Vielfachheit eins.

Die Eigenvektoren zum Eigenwert eins werden von der Matrix

$$A - E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

annuliert; wie deren erste und dritte Zeile zeigen, muß die erste Komponente eines jeden Lösungsvektors gleich dem negativen Dreifachen des ersten sein. Setzt man dieses in die zweite Zeile, folgt daß beide verschwinden müssen. Also wird der Eigenraum aufgespannt vom zweiten Basisvektor (dem man natürlich auch so ansieht, daß er ein Eigenvektor zum Eigenwert eins ist). Die geometrische Vielfachheit ist somit nur eins.

Die Eigenvektoren zum Eigenwert zwei werden von der Matrix

$$A - E = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

annuliert; hier zeigen erste und dritte Zeile, daß die erste Komponente das negative Doppelte der dritten ist und die zweite Zeile zeigt dann, daß die zweite Komponente gleich der dritten sein muß. Dieser Eigenraum wird also aufgespannt vom Spaltenvektor zu $(-2, 1, 1)$.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Lösung: *Nein,* denn die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts eins ist nur eins, während sein algebraische Vielfachheit zwei ist.

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt?

Lösung: Um eine Basis zu finden, bezüglich derer die Matrix Dreiecksgestalt hat, brauchen wir noch einen Hauptvektor zweiter Stufe zum Eigenwert eins. Da

$$(A - E)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ist, kommt dafür beispielsweise der Vektor mit Komponenten $3, 0, -1$ in Frage. Dies liefert eine Basis aus Eigen- und Hauptvektoren bestehend aus

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um die Dreiecksgestalt von A bezüglich dieser Basis zu berechnen, müssen wir noch wissen, wohin der Vektor $\vec{v}_2$ abgebildet wird und wie sich der Bildvektor in der Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ darstellen läßt:

$$A\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \,.$$

Da die Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_3$ einfach mit dem zugehörigen Eigenwert multipliziert werden, ist die Dreiecksgestalt bezüglich der Basis $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ somit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

d) Was ist e^{At} für $t \in \mathbb{R}$?

Lösung: Wir schreiben $\Delta = D + N$ mit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da N den zweiten Basisvektor auf den ersten abbildet und diesen wiederum auf den Nullvektor, ist N^2 die Nullmatrix, und nach der allgemeinen Theorie kommutieren N und D, d.h.

$$e^{\Delta t} = e^{Dt+Nt} = e^{Dt}e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} (E + Nt)$$
$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Um zu sehen, wie diese Matrix bezüglich der Standardbasis $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ aussieht, brauchen wir die Inverse zur Matrix B des Basiswechsels; letztere hat die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ als Spalten. Der GAUSS-Algorithmus beginnt mit

$$\begin{array}{rrr} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

Vertauschung der ersten beiden Zeilen macht daraus

$$\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Addition von zweimal der dritten Zeile zur zweiten führt auf

$$\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Addition der neuen zweiten Zeile zur dritten macht daraus

$$\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{array}$$

Um links eine Einheitsmatrix zu bekommen, müssen wir nur noch die dritte Zeile von der ersten subtrahieren:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}$$

Somit ist $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ und

$$e^{At} = B^{-1}e^{\Delta t}B = \begin{pmatrix} 3e^t - 2e^{2t} & 0 & -6e^{2t} + 6e^t \\ te^t + e^{2t} - e^t & e^t & 3e^{2t} - 3e^t + 2te^t \\ e^{2t} - e^t & 0 & -2e^t + 3e^{2t} \end{pmatrix}.$$

e) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = -x(t) - 6z(t), \quad \dot{y}(t) = 2x(t) + y(t) + 5z(t), \quad \dot{z}(t) = x(t) + 4z(t)$$

mit $x(0) = 1, y(0) = 0$ und $z(0) = -1$! Falls Sie Teil *d)* nicht lösen konnten, dürfen Sie hier auch mit der (völlig falschen) „Ersatzmatrix“ $e^{At} = \begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2te^{3t} & 0 & 3te^{2t} - 2e^{3t} \\ e^{4t} + e^{5t} & 1 & e^{4t} - e^{5t} \\ e^t + e^{2t} & 0 & e^{2t} + e^{3t} \end{pmatrix}$ arbeiten.

Lösung: Da dies ein lineares Differentialgleichungssystem mit Koeffizientenmatrix A ist, folgt aus der allgemeinen Theorie, daß es nur eine Lösung gibt, nämlich e^{At} mal dem Vektor der Anfangswerte, also

$$\begin{pmatrix} 3e^t - 2e^{2t} & 0 & -6e^{2t} + 6e^t \\ te^t + e^{2t} - e^t & e^t & 3e^{2t} - 3e^t + 2te^t \\ e^{2t} - e^t & 0 & -2e^t + 3e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^t + 4e^{2t} \\ -te^t - 2e^{2t} + 2e^t \\ -2e^{2t} + e^t \end{pmatrix}.$$

Somit ist $x(t) = -3e^t + 4e^{2t}$, $\quad y(t) = -te^t - 2e^{2t} + 2e^t \quad$ und $\quad z(t) = -2e^{2t} + e^t$.

f) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \pm\infty$?

Lösung: e^t und e^{2t} gehen für $t \to +\infty$ beide gegen unendlich und für $t \to -\infty$ gegen null. Durch Multiplikation mit t ändert sich daran nichts, also wächst die Lösung unbeschränkt für $t \to \infty$ und geht für $t \to -\infty$ gegen den Nullvektor.

Aufgabe 5: (*6 Punkte*)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 17y(t) = 104\cos t - 78\sin t\,!$$

Lösung: Die homogene Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 17y(t) = 0$$

hat die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 2\lambda + 17 = 0$. Quadratische Ergänzung macht daraus

$$\lambda^2 + 2\lambda + 17 = (\lambda + 1)^2 + 16 = 0\,,$$

die Nullstellen sind also $\lambda_{1/2} = -1 \pm 4i$ und die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist somit $y(t) = e^{-t}(a\cos 4t + b\sin 4t) \quad$ mit $\quad a, b \in \mathbb{R}$.
Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, reicht es, eine einzige Lösung zu finden, denn die Differenz zweier Lösungen erfüllt die homogene Gleichung.

Erfahrungsgemäß findet man bei Gleichungen dieser Bauart oft eine spezielle Lösung, die von ähnlicher Bauart ist wie die rechte Seite der Gleichung; wir können daher unser Glück versuchen mit einem Ansatz der Form $x(t) = c\cos t + d\sin t$. Dann ist

$$\dot{x}(t) = -c\sin t + d\cos t \quad \text{und} \quad \ddot{x}(t) = -c\cos t - d\sin t\,,$$

die Differentialgleichung führt also auf das lineare Gleichungssystem

$$-c + 2d + 17c = 16c + 2d = 104 \quad \text{und} \quad -d - 2c + 17d = -2c + 16d = -78\,.$$

Division durch zwei liefert das etwas angenehmere System $8c + d = 52$ und $-c + 8d = -39$. Achtmal die zweite Gleichung plus die erste ergibt $65d = -8 \cdot 39 + 52 = -260$. Somit ist $d = -4$ und $8c - 4 = 52$, also $c = 7$. Die spezielle Lösung ist also $x(t) = 7\cos t - 4\sin t$, und die gesuchte allgemeine Lösung somit

$$x(t) = 7\cos t - 4\sin t + e^{-t}(a\cos 4t + b\sin 4t) \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

b) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \pm\infty$?

Lösung: Da e^{-t} gegen Null geht, konvergieren alle Lösungen gegen die spezielle Lösung $x(t) = 7\cos t - 4\sin t$, also gegen eine reine Schwingung mit Perionde 2π.

Aufgabe 6: (*6 Punkte*)
Bestimmen Sie alle Extremwerte der Funktion $f(x, y) = 5x^2 + 4xy + 2y^2$ auf der Kreisscheibe $x^2 + y^2 \le 5$!
Hinweis: Falls Sie im Laufe der Lösung auf ein nichtlineare Gleichungssystem in x, y, λ stoßen, können Sie dieses als lineares Gleichungssystem in x, y auffassen mit λ als Parameter. Beachten Sie, daß es nur dann eine nichttriviale Lösung hat, wenn seine Determinante verschwindet.

Lösung: Für ein Extremum im Innern der Kreisscheibe muß der Gradient von f verschwinden, d.h.

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 10x + 4y \\ 4x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat offensichtlich nur die Lösung $(0, 0)$. Dort, wie auch in jedem anderen Punkt, ist die HESSE-Matrix von f gleich

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix};$$

sie hat Determinante $10 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = 24 > 0$ und auch der $(1, 1)$-Eintrag ist positiv, also ist sie positiv definit. Somit hat f im Nullpunkt ein Minimum, und es gibt keine weiteren Extrema im Innern.
Für Extrema auf dem Rand muß $\nabla f(x, y)$ linear abhängig vom Gradienten der Nebenbedingungsfunktion $g(x, y) = x^2 + y^2 - 5$ sein; da dieser auf dem Rand nirgends verschwindet, muß es daher ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben mit

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 10x + 4y \\ 4x + 4y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Wir haben also bei festgehaltenem λ das lineare Gleichungssystem

$$(10 - 2\lambda)x + 4y = 0 \quad \text{und} \quad 4x + (4 - 2\lambda)y = 0\,.$$

Wenn dieses eine von $(0,0)$ verschiedene Lösung hat, muß die Determinante

$$(10-2\lambda)(4-2\lambda)-16=4\lambda^2-28\lambda+24=4(\lambda^2-7\lambda+6)=4(\lambda-1)(\lambda-6)$$

verschwinden, d.h. $\lambda=1$ oder $\lambda=6$.
Für $\lambda=1$ bekommen wir für x,y das lineare Gleichungssystem

$$8x+4y=0 \quad \text{und} \quad 4x+2y=0\,,$$

d.h. $y=-2x$ bei beliebigem x.
Für $\lambda=6$ bekommen wir entsprechend das lineare Gleichungssystem

$$-2x+4y=0 \quad \text{und} \quad 4x-8y=0\,,$$

d.h. $y=2x$ bei beliebigem x.
In beiden Fällen ist also $y^2=4x^2$, und da die gesuchten Punkte auf dem Rand der Kreisscheibe liegen müssen, haben wir noch die Bedingung

$$x^2+y^2=5x^2=5, \quad \text{d.h} \quad x=\pm 1\,.$$

Somit müssen wir die vier Punkte $(\pm 1,\pm 2)$ betrachten.
Dort ist $f(x,y)=5x^2+4xy+2y^2=5+4xy+8=13+4xy$ gleich 21, falls x und y dasselbe Vorzeichen haben und fünf, falls sie verschiedene Vorzeichen haben. Somit sind $(1,2)$ und $(-1,-2)$ Maxima und $(1,-2)$ sowie $(-1,2)$ Minima. Die Maxima sind gleichzeitig die absoluten Maxima; das absolute Minimum liegt im Nullpunkt.