WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

15. März 2006

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Schreiben Sie $f(z) = \sin^4 z - \cos^4 z$ als Summe reiner Sinus- und Kosinusterme!

2) Was ist $\operatorname{Res}_{z=0} \dfrac{\cos z}{z^3}$?

3) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.

4) *Richtig oder falsch:* Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ HERMITEsch, so ist e^A diagonalisierbar.

5) Ein Meßinstrument kann Spannungen im Bereich von etwa einem Volt mit einer Genauigkeit von $\pm 0{,}02\,\mathrm{V}$ messen. Wie können Sie damit eine Spannung trotzdem mit einer Genauigkeit von $\pm 0{,}01\,\mathrm{V}$ bestimmen?

6) X und Y seien zwei Zufallsvariable, deren Verteilung die Standardnormalverteilung ist. Welche Verteilung hat $X + Y$?

Aufgabe 1: (*4 Punkte)*

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$ mit Hilfe des Residuensatzes!

b) Läßt sich auch $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2 - 4x + 5}$ so berechnen? (Nach dem Wert des Integrals ist nicht gefragt!)

Aufgabe 2: (*7 Punkte)*

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(t) = |\cos t|$ über dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$!

b) Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?

c) Welche Periode und welche Kreisfrequenz ω hat f ?

d) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f !

e) Wo tritt bei der Konvergenz dieser FOURIER-Reihe das GIBBS-Phänomen auf, und wohin konvergiert die Reihe an diesen Punkten?

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*

a) Berechnen Sie für $a > 1$ die FOURIER- und die LAPLACE-Transformierte der Funktion $f_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 1 \le t \le a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$! Wie verhalten sie sich für $a \to \infty$?

b) *ditto* für $f_a * f_a$!

c) Welche Ableitung hat f_a im Distributionensinne? (Es genügt, das Ergebnis in Funktionenschreibweise mit δ anzugeben.)

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 4: (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt?

d) Was ist e^{At} für $t \in \mathbb{R}$?

e) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = -x(t) - 6z(t), \quad \dot{y}(t) = 2x(t) + y(t) + 5z(t), \quad \dot{z}(t) = x(t) + 4z(t)$$

mit $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ und $z(0) = -1$! Falls Sie Teil *d)* nicht lösen konnten, dürfen Sie hier auch mit der (völlig falschen) „Ersatzmatrix“ $e^{At} = \begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2te^{3t} & 0 & 3te^{2t} - 2e^{3t} \\ e^{4t} + e^{5t} & 1 & e^{4t} - e^{5t} \\ e^{t} + e^{2t} & 0 & e^{2t} + e^{3t} \end{pmatrix}$ arbeiten.

f) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \pm\infty$?

Aufgabe 5: (*6 Punkte*)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 17y(t) = 104\cos t - 78\sin t\,!$$

b) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \pm\infty$?

Aufgabe 6: (*6 Punkte*)

Bestimmen Sie alle Extremwerte der Funktion $f(x, y) = 5x^2 + 4xy + 2y^2$ auf der Kreisscheibe $x^2 + y^2 \le 5$!

Hinweis: Falls Sie im Laufe der Lösung auf ein nichtlineare Gleichungssystem in x, y, λ stoßen, können Sie dieses als lineares Gleichungssystem in x, y auffassen mit λ als Parameter. Beachten Sie, daß es nur dann eine nichttriviale Lösung hat, wenn seine Determinante verschwindet.

$\mathcal{H\ I\ L\ F\ S\ M\ I\ T\ T\ E\ L}$

Als Hilfsmitel sind nur Taschenrechner ohne Graphik und ohne höhere Programmiersprache oder CAS zugelassen.

$\mathcal{H\ I\ N\ W\ E\ I\ S\ E}$

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \qquad \mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \qquad \mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ für } n \ge 0$$

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben. Da ich bis Montag abend weg bin, wird dies allerdings erst Mitte nächster Woche geschehen.

Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe, notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •