WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

22. März 2006

Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die Menge M aller Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^2$ mit $xy = 0$ ist ein Untervektorraum.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise liegen die Vektoren $\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$ beide in M, nicht aber ihre Summe $\binom{1}{1}$.

2) Richtig oder falsch: Für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei $A^3 = A$. Dann ist A eine Diagonalmatrix und jeder der Diagonaleinträge ist eine der drei Zahlen $0, 1$ oder -1.

Lösung: *Falsch;* auch z.B. für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist $A^3 = A$, denn A ist Abbildungsmatrix der linearen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die die ersten beiden Koordinaten miteinander vertauscht.

3) Bestimmen Sie die Determinante der 6×6-Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 4 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 16 & 16 & 27 & 5 & 0 \\ 1 & 32 & 64 & 81 & 25 & 6 \end{pmatrix}$!

Lösung: Vertauscht man die dritte und die vierte Spalte, erhält man eine untere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $1, 2, 3, 4, 5, 6$ und somit Determinante $6! = 720$. Die Vertauschung führt zu einem Vorzeichenwechseln, also ist $\det A = -720$.

4) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2^2;\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$ ist linear.

Lösung: *Richtig,* denn jedes Element von $\mathbb{F}_2$ ist gleich seinem Quadrat, die Abbildung vertauscht also nur die beiden Komponenten eines Vektors, was natürlich eine lineare Operation ist.

5) Finden Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4i \\ 5i \end{pmatrix}$ aufgespannten Unterraums von $\mathbb{C}^3$!

Lösung: $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = 5i \cdot (-i) = 5$; daher bildet $\vec{v}_1$ zusammen mit $\vec{w} = \vec{v}_2 - 5\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4i \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Orthogonalbasis. $\vec{v}_1$ hat bereits die Länge eins, die von $\vec{w}$ ist $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Somit bilden v_1 und $\dfrac{1}{5}\vec{w}$ eine Orthonormalbasis.

6) Was ist $\displaystyle\int_{-1/3}^{1/2} \frac{dx}{x^4}$?

Lösung: Der Integrand hat an der Stelle $x = 0$ eine Polstelle; da auch die Stammfunktion $-1/3x^3$ dort einen Pol hat, divergieren sowohl das Integral von $-1/3$ bis 0 als auch das von 0 bis $1/2$. Da beide diese Integrale nach $+\infty$ divergieren, gilt dasselbe für das gesuchte Integral, für das somit nicht einmal ein CAUCHYscher Hauptwert existiert.

7) Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom dritten Grades von

$$f(x, y) = \sin(x + y)\sin(x - y) + \cos(x + y)\cos(x - y)$$

um den Nullpunkt!

Lösung: Wir kennen die TAYLOR-Reihen von $\sin z = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ und auch die von $\cos z = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$; Einsetzen von $z = x \pm y$ liefert

$$\sin(x \pm y) = (x \pm y) - \frac{(x \pm y)^3}{3!} + \cdots \quad \text{und} \quad \cos(x \pm y) = 1 - \frac{(x \pm y)^2}{2!} + \cdots,$$

wobei die weggelassenen Summanden nur Terme vom Grad größer drei liefern. Ausmultiplzieren und Weglassen aller Terme von Grad größer drei führt somit auf

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 1 - \frac{(x + y)^2}{2} - \frac{(x - y)^2}{2} + \cdots = 1 - 2y^2 + \cdots.$$

8) Was ist $\operatorname{grad}\operatorname{div}\operatorname{grad}\sin(x + 2y + 3z)$?

Lösung: Die Divergenz des Gradienten einer Funktion f ist $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, hier also $\Delta \sin(x + 2y + 3z) = -\sin(x + 2y + 3z) \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2) = -14\sin(x + 2y + 3z)$. Der Gradient davon ist das Vektorfeld $\begin{pmatrix} -14\cos(x + 2y + 3z) \\ -28\cos(x + 2y + 3z) \\ -42\cos(x + 2y + 3z) \end{pmatrix}$.

Aufgabe 1: *(9 Punkte)*

Der Vektorraum $V \le \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sei erzeugt von der konstanten Funktion 1 sowie den Funktionen $\sin t, \cos t, \sin^2 t, \sin t \cos t$ und $\cos^2 t$.

a) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V!

Lösung: Die Gleichung $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ liefert eine lineare Abhängigkeit unter den erzeugenden Funktionen, wir können also auf eine der drei beteiligten Funktionen verzichten, z.B. auf $\cos^2 t$. Die restlichen Funktionen sind linear unabhängig, denn wäre

$$\lambda \cdot 1 + \mu \cdot \sin t + \nu \cdot \cos t + \sigma \sin^2 t + \tau \sin t \cos t = 0$$

für alle t, so bekommen wir für $t = 0$ die Gleichung $\lambda + \nu = 0$ und für $t = \pi$ die Gleichung $\lambda - \nu = 0$, d.h. $\lambda = \nu = 0$. Setzen wir nun $t = \pm\frac{\pi}{2}$ ein, so bekommen wir $\pm\mu + \sigma = 0$, dh. $\mu = \sigma = 0$. Damit hat sich obige Gleichung reduziert auf $\tau \sin t \cos t = 0$, was nur mit $\tau = 0$ für alle t gelten kann, d.h. alle fünf Koeffizienten müssen verschwinden. Somit bilden die Funktionen $1, \sin t, \cos t, \sin^2 t, \sin t \cos t$ eine Basis von V.

b) Zeigen Sie: $f \mapsto \dfrac{df}{dt}$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$.

Lösung: Da Differentiation eine lineare Operation ist, müssen wir nur zeigen, daß die Ableitung jeder Funktion aus V wieder in V liegt; dazu reicht es, eben wegen der Linearität, wenn wir dies für die Basiselemente nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= 0\\
\varphi(\sin t) &= \cos t\\
\varphi(\cos t) &= -\sin t\\
\varphi(\sin^2 t) &= 2\sin t\cos t\\
\varphi(\sin t\cos t) &= \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t
\end{aligned}$$

Offensichtlich liegen alle Ableitungen in V.

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der in *a)* gefundenen Basis!

Lösung: In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren; da diese aus dem Ergebnis der obigen Rechnung direkt abgelesen werden können, läßt sich die Matrix direkt hinschreiben:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Welche Dimensionen haben Kern φ und Bild φ ?

Lösung: Die Ableitung einer Funktion verschwindet genau dann, wenn die Funktion konstant ist; da V die Konstanten enthält, ist der Kern also eindimensional. Nach der Dimensionsformel folgt $\dim \text{Bild}\,\varphi = \dim V - \dim \text{Kern}\,\varphi = 5 - 1 = 4$.

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
x + y - 2z &= 4 &&(1)\\
3x - 2y - z &= 2 &&(2)\\
5x - 6y + a^2 z &= a - 1 &&(3)
\end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$!
*Hinweis (***nur** *zur Kontrolle auf Rechenfehler): Für viele Werte des Paramerts a ist* $z = 1/(a-1)$.

Lösung: Zur Elimination von x aus den Gleichungen (2) und (3) subtrahieren wir die erste Gleichung dreimal von der zweiten und fünfmal von der dritten:

$$\begin{aligned}
-5y + 5z &= -10 &&(4)\\
-11y + (a^2+10)z &= a - 21 &&(5)
\end{aligned}$$

Gleichung (4) ist äquivalent zur deutlich angenehmeren Gleichung $y - z = 2$; addieren wir diese elfmal zu (5), erhalten wir

$$(a^2 - 1)z = a + 1\,.$$

Für $a = 1$ steht hier $0 = 2$; in diesem Fall ist das Gleichungssystem somit unlösbar.

Für $a = -1$ erhalten wir die Gleichung $0z = 0$, die von jeder reellen Zahl $z = \lambda$ erfüllt wird.

Für $a \neq \pm 1$ schließlich können wir zunächst durch $a+1$ kürzen zu $(a-1)z = 1$ und dann durch $a-1$ dividieren, was auf $z = \dfrac{1}{a-1}$ führt.

Da $y - z = 2$ ist, erhalten wir weiter

$$y = 2 + z = \begin{cases} 2+\lambda & \text{für } a = -1 \\ 2 + \frac{1}{a-1} = \frac{2a-1}{a-1} & \text{für } a \neq \pm 1 \end{cases} .$$

Setzen wir dies in Gleichung (1) ein, erhalten wir

$$x = 4 - y + 2z = 4 - (z+2) + 2z = 2 + z = y .$$

$$\text{Somit ist } \mathcal{L}_a = \begin{cases} \left\{\left(\frac{2a-1}{a-1}, \frac{2a-1}{a-1}, \frac{1}{a-1}\right)\right\} & \text{für } a \neq \pm 1 \\ \left\{(2+\lambda, 2+\lambda, \lambda) \bigm| \lambda \in \mathbb{R}\right\} & \text{für } a = -1 \\ \emptyset & \text{für } a = +1 \end{cases} .$$

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*
Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$!

Lösung: Bei der Berechnung des charakteristischen Polynoms bietet sich Entwicklung nach der zweiten Zeile (oder Spalte) an:

$$\det(A - \lambda E) = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\big((1-\lambda)(3-\lambda) - 15\big) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 12) .$$

Der zweite Faktor wird durch quadratische Ergänzung zu $(\lambda-2)^2 - 16$, hat also die Nullstellen 2 ± 4. Die Eigenwerte sind somit ± 2 und 6.

Als Eigenvektor zum Eigenwert zwei können wir natürlich einfach den zweiten Basisvektor nehmen, denn der wir ja durch Multiplikation mit der Matrix auf deren zweite Spalte, also sein Doppeltes abgebildet.

Für den Eigenwert -2 erhalten wir $A + 2E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; für einen Eigenvektor $\vec{v}_2$ zu -2 muß wegen $(A+2E)\vec{v}_2 = \vec{0}$ also die zweite Komponente verschwinden sowie auch dreimal die erste plus fünfmal die dritte. Der Eigenraum zum Eigenwert -2 wird somit aufgespannt von $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$A - 6E = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ annuliert genau die Vektoren, deren zweite Komponente verschwindet, während die dritte gleich der ersten ist; der Eigenraum zum Eigenwert sechs wird also aufgespannt von $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf für die Koeffizienten a und b der Ausgleichsgeraden $y = ax + b$ durch die vier Datenpunkte $(\pm 1, \pm 1)$!

Lösung: Lägen die drei Punkte wirklich auf einer Geraden $ax + b = y$, hätten wir die vier Gleichungen

$$1 \cdot a + b = 1, \quad 1 \cdot a + b = -1, \quad -1 \cdot a + b = 1 \quad \text{und} \quad -1 \cdot a + b = -1 ,$$

also das lineare Gleichungssystem

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses ist natürlich unlösbar; das gesuchte Gleichungssystem entsteht daraus durch Multiplikation mit der transponierten Matrix von A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

das gesuchte LGS ist also $\quad 4a = 0 \quad$ und $\quad 4b = 0\,.$

b) Geben Sie die Gleichung der Ausgleichsgeraden explizit an!

Lösung: Da a und b beide verschwinden, ist das die Gerade $y = 0$.

c) Welchen Korrelationskoeffizienten haben x- und y-Koordinate der betrachteten vier Datenpunkte?

Lösung: Beide Koordinaten haben Mittelwert null, ihr Abstand vom Mittelwert sind also sie selbst, und da der Vektor der x-Werte mit dem der y-Werte Skalarprodukt null hat, verschwindet der Korrelationskoeffizient – was bei diesen Datenpunkten natürlich auch anschaulich klar ist.

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie Gradient und HESSE-Matrix der Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sin xy + 2\cos(x+y) + 3x^2 + 4xy + 5y^2 \end{cases} !$$

Lösung: Da die Funktion beliebig oft stetig differenzierbar ist, also insbesondere zweimal, genügt es, die partiellen Ableitungen zu berechnen; außerdem können wir das Lemma von SCHWARZ anwenden, wonach $f_{xy} = f_{yx}$ ist. Wegen

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= y\cos xy - 2\sin(x+y) + 6x + 4y \\ f_y(x,y) &= x\cos xy - 2\sin(x+y) + 4x + 10y \\ f_{xx}(x,y) &= -y^2\sin xy - 2\cos(x+y) + 6 \\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) &= \cos xy - xy\sin xy - 2\cos(x+y) + 4 \\ f_{yy}(x,y) &= -x^2\sin xy - 2\cos(x+y) + 10 \end{aligned}$$

ist somit $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos xy - 2\sin(x+y) + 6x + 4y \\ x\cos xy - 2\sin(x+y) + 4x + 10y \end{pmatrix}$ und

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -y^2\sin xy - 2\cos(x+y) + 6 & \cos xy - xy\sin xy - 2\cos(x+y) + 4 \\ \cos xy - xy\sin xy - 2\cos(x+y) + 4 & -x^2\sin xy - 2\cos(x+y) + 10 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die JACOBI-Matrix und die Divergenz des Vektorfelds

$$\vec{V}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} y + e^{\sin xy} \\ \dfrac{x+y}{\cos x} \end{pmatrix} \end{cases} !$$

Lösung: Die erste Komponente $y + e^{\sin xy}$ von $\vec{V}$ hat nach der Kettenregel die partiellen Ableitungen

$$e^{\sin xy} \cdot y \cos xy \quad \text{und} \quad 1 + e^{\sin xy} \cdot x \cos xy \, ;$$

für die zweite Komponente $\dfrac{x+y}{\cos x}$ erhalten wir entsprechend (nach der Quotientenregel *bzw.* weil der Nenner bezüglich der partiellen Ableitung nach y als Konstante betrachtet wird)

$$\frac{\cos x + (x+y) \sin x}{\cos^2 x} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\cos x} \, .$$

Also ist

$$J_{\vec{V}}(x,y) = \begin{pmatrix} e^{\sin xy} \cdot y \cos xy & 1 + e^{\sin xy} \cdot x \cos xy \\ \frac{1}{\cos x} + \frac{(x+y)\sin x}{\cos^2 x} & \frac{1}{\cos x} \end{pmatrix} .$$

Die Divergenz von $\vec{V}$ ist die Summe der Diagonalelemente der JACOBI-Matrix, also

$$\operatorname{div} \vec{V}(x,y) = e^{\sin xy} \cdot y \cos xy + \frac{1}{\cos x} \, .$$