Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

22. März 2006

Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Die Menge M aller Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^2$ mit $xy = 0$ ist ein Untervektorraum.

2) *Richtig oder falsch:* Für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei $A^3 = A$. Dann ist A eine Diagonalmatrix und jeder der Diagonaleinträge ist eine der drei Zahlen $0, 1$ oder -1.

3) Bestimmen Sie die Determinante der 6×6-Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 4 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 16 & 16 & 27 & 5 & 0 \\ 1 & 32 & 64 & 81 & 25 & 6 \end{pmatrix}$!

4) *Richtig oder falsch:* Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2^2;\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$ ist linear.

5) Finden Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4i \\ 5i \end{pmatrix}$ aufgespannten Unterraums von $\mathbb{C}^3$!

6) Was ist $\displaystyle\int_{-1/3}^{1/2} \frac{dx}{x^4}$?

7) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom dritten Grades von

$$f(x, y) = \sin(x + y)\sin(x - y) + \cos(x + y)\cos(x - y)$$

um den Nullpunkt!

8) Was ist $\operatorname{grad}\operatorname{div}\operatorname{grad}\sin(x + 2y + 3z)$?

Aufgabe 1: *(9 Punkte)*
Der Vektorraum $V \le \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sei erzeugt von der konstanten Funktion 1 sowie den Funktionen $\sin t, \cos t, \sin^2 t, \sin t \cos t$ und $\cos^2 t$.

a) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V!

b) Zeigen Sie: $f \mapsto \dfrac{df}{dt}$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$.

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der in *a)* gefundenen Basis!

d) Welche Dimensionen haben Kern φ und Bild φ ?

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rl} x+\ y-\ 2z &= 4 \qquad (1)\\ 3x-2y-\ \ z &= 2 \qquad (2)\\ 5x-6y+a^2z &= a-1 \qquad (3)\end{array}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$!
*Hinweis (***nur** *zur Kontrolle auf Rechenfehler): Für viele Werte des Paramerts a ist* $z = 1/(a-1)$.

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*
Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf für die Koeffizienten a und b der Ausgleichsgeraden $y = ax + b$ durch die vier Datenpunkte $(\pm 1, \pm 1)$!

b) Geben Sie die Gleichung der Ausgleichsgeraden explizit an!

c) Welchen Korrelationskoeffizienten haben x- und y-Koordinate der betrachteten vier Datenpunkte?

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie Gradient und HESSE-Matrix der Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sin xy + 2\cos(x+y) + 3x^2 + 4xy + 5y^2 \end{cases} !$$

b) Berechnen Sie die JACOBI-Matrix und die Divergenz des Vektorfelds

$$\vec{V}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} y + e^{\sin xy} \\ \dfrac{x+y}{\cos x} \end{pmatrix} \end{cases} !$$

$\mathcal{HILFSMITTEL}$

Als Hilfsmitel sind nur Taschenrechner ohne Graphik
und ohne höhere Programmiersprache oder CAS zugelassen.

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben.
Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe,
notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 22. März 2006, um 10^{15} Uhr

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •