Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

4. Februar 2006

Scheinklausur Höhere Mathematik II

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Finden Sie eine komplexe Zahl z mit $z^2 = i$!

Lösung: Da $i = e^{\pi i/2}$ ist, können wir z.B. $z = e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ nehmen.

2) $f(z) = e^{\cos z}$ ist eine holomorphe Funktion.

Lösung: *Richtig,* denn $z \mapsto e^z$ sowie $z \mapsto \cos z$ sind holomorphe Funktionen, und die Verknüpfung zweier holomorpher Funktionen ist wieder holomorph.

3) Was ist das Residuum von $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$ an der Stelle $z = 1$?

Lösung: $\dfrac{z}{(z-1)^2} = \dfrac{(z-1)+1}{(z-1)^2} = \dfrac{1}{(z-1)^2} + \dfrac{1}{z-1}$ ist die Laurent-Entwicklung von f um $z = 1$; also ist das Residuum als Koeffizient von $(z-1)^{-1}$ gleich eins.

4) *Richtig oder falsch:* Jede positiv definite Matrix ist invertierbar

Lösung: *Richtig,* denn sie ist diagonalisierbar und alle ihre Eigenwerte sind positiv. Damit ist auch die Determinante als Produkt der Eigenwerte positiv, insbesondere also ungleich null.

5) *Richtig oder falsch:* Ist die Matrix A invertierbar, so ist $e^{(A^{-1})}$ invers zu e^A.

Lösung: *Falsch:* Für $A = 2E$ beispielsweise ist $e^A = e^2 E$, die inverse Matrix zu A ist $\frac{1}{2}E$, aber $e^{(A^{-1})} = \sqrt{e}E$ ist nicht invers zu e^A.

6) Welche Nullstellen hat das Polynom $x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 2$?

Lösung: Das Produkt aller Nullstellen ist $(-1)^5 \cdot 2 = -2$, genauso auch die Summe. *Falls* alle Nullstellen ganzzahlig sein sind, kommen nur die Teiler von zwei in Frage, also ± 1 und ± 2. In der Tat verschwindet f für die drei Werte ± 1 und -2. Deren Produkt ist zwei und ihre Summe ist -2; also haben die beiden noch fehlenden Nullstellen Produkt -1 und Summe 0, sind also ± 1. Damit sind ± 1 doppelte Nullstellen, und -2 ist eine einfache.

7) *Richtig oder falsch:* Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = 3\sqrt[3]{y(t)^2}$ mit $y(0) = 0$ hat genau eine Lösung.

Lösung: *Falsch:* $y(t) \equiv 0$ und $y(t) = t^3$ sind zwei Lösungen. (Der Satz von Picard-Lindelöf ist nicht anwendbar, da die Ableitung $2/\sqrt[3]{y}$ von $3\sqrt[3]{y^2} = y^{2/3}$ nach y für $y \to 0$ nicht beschränkt bleibt.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{8x^2}{x^4+4}\,dx$!

Lösung: Bei Integralen einer solchen Bauart führt meist der Umweg über die komplexen Zahlen am schnellsten zu Erfolg. Wie im Komplexen üblich, benennen wir die Variable um in z, schreiben den Integranden also in der Form $f(z) = \dfrac{8z^2}{z^4+4}$.

Wir müssen zunächst die Pole von f, d.h. die Nullstellen des Nenners, bestimmen: z^4+4 verschwindet genau dann, wenn $z^2 = \pm 2i$ ist, der Nenner ist also

$$z^4+4 = (z^2+2i)(z^2-2i) \quad \text{mit} \quad z^2+2i = (z-1+i)(z+1-i) \;\text{ und }\; z^2-2i = (z-1-i)(z+1+i)$$

(vergleiche Frage 1) und hat somit die Nullstellen $z = \pm 1 \pm i$. Da der Zähler für keine dieser vier Zahlen verschwindet, sind sie allesamt Polstellen von f.

Der Integrationsweg γ_R sei der Halbkreis um den Nullpunkt vom Punkt R durch die obere Halbebene zum Punkt $-R$; in Formeln also $\gamma_R\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}$; $\quad t \mapsto Re^{it}$.

δ_R sei der Integrationsweg, der mit γ_R beginnt und dann entlang der reellen Achse von $-R$ nach R geht. Damit ist δ_R eine geschlossene Kurve, und Integrale entlang δ_R können nach dem Residuensatz berechnet werden.

Für $R > \sqrt{2}$ liegen im Innern des von δ_R berandeten Halbkreises die beide Pole $z_1 = 1+i$ und $z_2 = -1+i$. Beide sind Pole erster Ordnung, d.h. $\operatorname{Res}_{z=z_\nu} f(z) = \lim_{z\to z_\nu}(z-z_\nu)f(z)$.

Damit ist $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z\to z_1}(z-1-i)f(z) = \lim_{z\to 1+i} \frac{8z^2}{(z^2+2i)(z+1+i)}$

$$= \frac{8(1+i)^2}{\big((1+i)^2+2i\big)(1+i+1+i)} = \frac{8\cdot 2i}{4i\cdot(2+2i)} = \frac{16i}{-8+8i} = 1-i\,,$$

und genauso $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \lim_{z\to z_2}(z+1-i)f(z) = \lim_{z\to -1+i} \frac{8z^2}{(z-1+i)(z^2-2i)}$

$$= \frac{8(-1+i)^2}{(-1+i-1+i)\big((-1+i)^2+2i\big)} = \frac{-8\cdot 2i}{(-2+2i)\cdot 4i} = \frac{-4}{-2+2i} = \frac{2}{1-i} = -1-i\,.$$

Nach dem Residuensatz ist daher

$$\int_{\delta_R} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=1+i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-1+i} f(z)\right) = 2\pi i\big((1-i)+(-1-i)\big) = 4\pi\,.$$

Das ist auch der Wert des gesuchten Integrals, denn da der Grad des Zähler um zwei kleiner ist als der des Nenners, verschwindet das Integral über γ_R für $R \to \infty$, d.h.

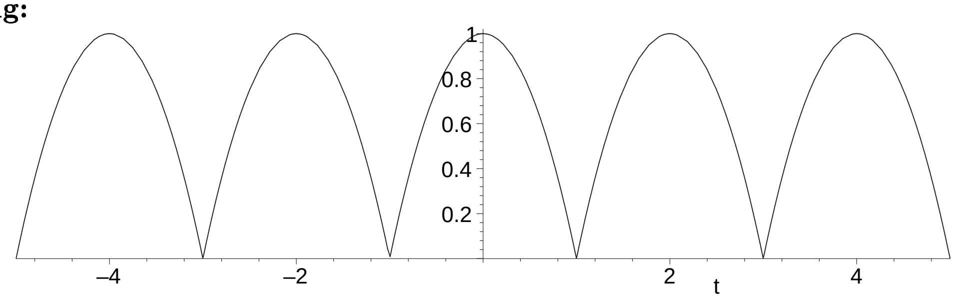
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{\delta_R} f(z)\,dz = 4\pi\,.$$

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

Sei $f(t) = 1-t^2$ für $-1 < t \le 1$, periodisch fortgesetzt mit Periode zwei.

a) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-5,5]$!

Lösung:



b) Ist f gerade, ungerade oder keins von beiden?

Lösung: Da das Intervall $[-1, 1]$, in dem f explizit vorgegeben ist, symmetrisch zum Nullpunkt liegt und t^2 eine gerade Funktion ist, ist auch f gerade.

c) Berechnen Sie die reelle FOURIER-Reihe von f!

Lösung: Da f eine gerade Funktion ist, gibt es nur Kosinusterme sowie den konstanten Term. Zur Berechnung dieser Terme integrieren wir am besten über das Periodenintervall $[-1, 1]$, in dem f explizit gegeben ist. Die zur Periode zwei gehörige Kreisfrequenz ist $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$, also ist

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-t^2)\,dt = \frac{1}{2}\left(t - \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right) = \frac{2}{3}$$

und (siehe Formelanhang)

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega t\,dt = \int_{-1}^{1}(1-t^2)\cos k\pi t\,dt = \int_{-1}^{1}\cos k\pi t\,dt - \int_{-1}^{1} t^2\cos k\pi t\,dt \\ &= \frac{\sin k\pi t}{k\pi}\Big|_{-1}^{1} - \left(\frac{(k\pi t)^2-2}{(k\pi)^3}\sin k\pi t + \frac{2t}{(k\pi)^2}\cos k\pi t\right)\Big|_{-1}^{1} \\ &= -\frac{2\cos k\pi}{k\pi)^2} = (-1)^{k+1}\frac{4}{(k\pi)^2}\,. \end{aligned}$$

Die FOURIER-Reihe von f ist daher $\displaystyle\frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{4}{(k\pi)^2}\cos k\pi t\,.$

d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert diese gegen $f(t)$? Wohin konvergiert sie sonst?

Lösung: Da f eine stetige Funktion ist, konvergiert die FOURIER-Reihe überall gegen $f(t)$.

e) Für welche $t \in \mathbb{R}$ tritt das GIBBS-Phänomen auf?

Lösung: Das GIBBS-Phänomen tritt nur an Sprungstellen auf, hier also überhaupt nicht.

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*
Berechnen Sie die Ableitung im Distributionensinn der Funktion $f(t) = (t - [t])^2$, wobei $[t]$ die größte ganze Zahl $\le t$ bezeichnet!

Lösung: Wir wissen, daß die Ableitung im Distributionensinn überall dort, wo die Funktion differenzierbar ist, mit der Ableitung selbst übereinstimmt, während jede Sprungstelle a einen Term $\big(f(a^+) - f(a^-)\big)\cdot\delta(t-a)$ liefert. Die hier betrachtete Funktion f ist für alle $t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ differenzierbar mit Ableitung $g(t) = 2(t-[t])$ und hat an den ganzzahligen Stellen jeweils einen Sprung von eins auf null; damit ist

$$\dot{T}_f(\varphi) = T_g(\varphi) - \sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi(k) = 2\int_{-\infty}^{\infty}(t-[t])\varphi(t)\,dt - \sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi(k)\,.$$

Als „Funktion" geschrieben ist die Ableitung gleich $\dot{f}(t) = 2(t-[t]) - \sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta(t-k)\,.$

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*
a) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte von $f(t) = \begin{cases} t^2 - 100 & \text{für } |t| \le 10 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ in reeller Form!

Lösung: Laut Formelanhang ist

$$\widehat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt=\int_{-10}^{10}(t^2-100)e^{-i\omega t}\,dt=\int_{-10}^{10} t^2e^{-i\omega t}\,dt-100\int_{-10}^{10} e^{-i\omega t}\,dt$$

$$=\frac{(-i\omega t)^2+2i\omega t+2}{(-i\omega)^3}e^{-i\omega t}\Big|_{-10}^{10}-100\,\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\Big|_{-10}^{10}$$

$$=\frac{-100\omega^2+2}{i\omega^3}(e^{-10i\omega}-e^{10i\omega})+\frac{20i\omega}{i\omega^3}(e^{-10\omega}+e^{10\omega})-100\cdot\frac{e^{-10i\omega}-e^{10i\omega}}{-i\omega}$$

$$=\frac{200}{\omega}\sin 10\omega-\frac{4}{\omega^3}\sin 10\omega+\frac{40}{\omega^2}\cos 10\omega-\frac{200}{\omega}\sin 10\omega=\frac{40\cos 10\omega}{\omega^2}-\frac{4\sin 10\omega}{\omega^3}$$

b) $g(t)$ sei überall dort, wo f differenzierbar ist, gleich der Ableitung von f; ansonsten sei $g(t)=0$. Bestimmen Sie g sowie die FOURIER-Transformierte von g !

Lösung: f ist überall differenzierbar außer an den beiden Stellen $t=\pm10$. Daher ist

$$g(t)=\begin{cases}2t & \text{falls } |t|<10\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}.$$

Die FOURIER-Transformierte von g entsteht aus der von f durch Multiplikation mit $i\omega$, d.h.

$$\widehat{g}(\omega)=i\omega\widehat{f}(\omega)=\frac{40i\cos 10\omega}{\omega}-\frac{4i\sin 10\omega}{\omega^2}.$$

(Man kann sie natürlich auch direkt ausrechnen.)

Aufgabe 5: (*8 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A=\begin{pmatrix}3&-3&1&-1\\3&1&1&-5\\1&-1&3&-3\\1&-5&3&1\end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

Lösung: Das charakteristische Polynom ist

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}3-\lambda&-3&1&-1\\3&1-\lambda&1&-5\\1&-1&3-\lambda&-3\\1&-5&3&1-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&1&-5\\-1&3-\lambda&-3\\-5&3&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$-3\begin{vmatrix}-3&1&-1\\-1&3-\lambda&-3\\-5&3&1-\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-3&1&-1\\1-\lambda&1&-5\\-5&3&1-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-3&1&-1\\1-\lambda&1&-5\\-1&3-\lambda&-3\end{vmatrix}$$

Die 3×3-Determinanten können nach SARRUS ausgerechnet werden:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&1&-5\\-1&3-\lambda&-3\\-5&3&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)+1\cdot3\cdot5+5\cdot1\cdot3+(1-\lambda)\cdot3\cdot3-(3-\lambda)\cdot5\cdot5+(1-\lambda)$$

$$=-\lambda^3+(1+3+1)\lambda^2-(3+1+3)\lambda+3+15+15+9-9\lambda-75+25\lambda+1-\lambda=-\lambda^3+5\lambda^2+8\lambda-32\,,$$

$$\begin{vmatrix}-3&1&-1\\-1&3-\lambda&-3\\-5&3&1-\lambda\end{vmatrix}=-3\cdot(3-\lambda)(1-\lambda)+1\cdot3\cdot5+1\cdot1\cdot3-3^3+(1-\lambda)-5\cdot(3-\lambda)$$

$$=-3\lambda^2+12\lambda-9+15+3-27+1-\lambda-15+5\lambda=-3\lambda^2+16\lambda-32\,,$$

$$\begin{vmatrix}-3&1&-1\\1-\lambda&1&-5\\-5&3&1-\lambda\end{vmatrix}=-3\cdot(1-\lambda)+1\cdot5\cdot5-(1-\lambda)\cdot3-5-3\cdot5\cdot3-(1-\lambda)^2$$

$$=-3+3\lambda+25-3+3\lambda-5-45-1+2\lambda-\lambda^2=-\lambda^2+8\lambda-32$$

$$\begin{vmatrix}-3&1&-1\\1-\lambda&1&-5\\-1&3-\lambda&-3\end{vmatrix}=3\cdot1\cdot3+1\cdot5\cdot1-(1-\lambda)(3-\lambda)-1+3\cdot(1-\lambda)-3\cdot5\cdot(3-\lambda)$$

$$=9+5-3+4\lambda-\lambda^2-1+3-3\lambda-45+15\lambda=-\lambda^2+16\lambda-32\,.$$

Damit ergibt sich das charakteristische Polynom zu $\det(A-\lambda E) =$

$$\begin{aligned}&(3-\lambda)(-\lambda^3+5\lambda^2+8\lambda-32)-3\cdot(-3\lambda^2+16\lambda-32)+(-\lambda^2+8\lambda-32)-(-\lambda^2+16\lambda-32)\\ &=-3\lambda^3+15\lambda^2+24\lambda-96+\lambda^4-5\lambda^3-8\lambda^2+32\lambda+9\lambda^2-48\lambda+96-\lambda^2+8\lambda-32+\lambda^2-16\lambda+32\\ &=\lambda^4-8\lambda^3+16\lambda^2=\lambda^2(\lambda^2-8\lambda+16)=\lambda^2(\lambda-4)^2\,.\end{aligned}$$

Es gibt also zwei Eigenwerte mit algebraischer Vielfachheit jeweils zwei: $\lambda_1=0$ und $\lambda_2=4$. Zur Bestimmung der geometrischen Vielfachheit der λ_i berechnen wir im Hinblick auch *c)* bis *e)* am besten gleich Basen der Eigenräume. Für $\lambda_1=0$ erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}3x-3y+z-w&=0\\ 3x+y+z-5w&=0\\ x-y+3z-3w&=0\\ x-5y+3z+w&=0\end{aligned}$$

Subtrahieren wir die dritte Zeile dreimal von der ersten, erhalten wir die neue Gleichung $-8z+8w=0$, d.h. $z=w$ Dies in die erste Gleichung eingesetzt führt auf $x=y$. Mit $x=y$ und $z=w$ ist die dritte Gleichung erfüllt; die zweite und die vierte werden zu $4x-4z=0$ beziehungsweise dem Negativen davon, d.h. wir haben $x=y=z=w$. Somit ist der Eigenraum eindimensional und die geometrische Vielfachheit von $\lambda_1=0$ ist nur eins. Basis des Eigenraums ist beispielsweise der Vektor mit lauter Einsen als Komponenten.

Für $\lambda_2=4$ haben wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}-x-3y+z-w&=0\\ 3x-5y+z-5w&=0\\ x-y-z-3w&=0\\ x-5y+3z-3w&=0\end{aligned}$$

Addition der dritten Gleichung zur ersten führt zu $-4y-4w=0$, d.h. $w=-y$. Subtraktion der vierten Gleichung von der dritten zeigt, daß $4y-4z=0$ ist, also $y=z$. Beides eingesetzt in die dritte Gleichung liefert $x=-z$; der Eigenraum ist also auch hier nur eindimensional und aufgespannt vom Vektor $(1,-1,-1,1)$. Insbesondere ist die geometrische Vielfachheit auch hier nur eins.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Lösung: *Nein;* die geometrische Vielfachheit ist sogar bei beiden Eigenwerten kleiner als die algebraische; einer würde bereits genügen, um die Diagonalisierbarkeit zu verhindern.

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt Δ?

Lösung: Um eine Basis von $\mathbb{R}^4$ zu finden, bezüglich derer die Matrix Dreiecksgestalt hat, brauchen wir zunächst noch Hauptvektoren zweiter Stufe zu den beiden Eigenwerten. Da

$$A^2=\begin{pmatrix}0&-8&0&8\\ 8&16&-8&-16\\ 0&8&0&-8\\ -8&-16&8&16\end{pmatrix}$$

ist, müssen die erste und die dritte sowie die zweite und die vierte Komponente jedes Hauptvektors gleich sein. Wenn wir im Hinblick auf *d)* gleich einen Hauptvektor suchen, der auf dem Eigenvektor senkrecht steht, können wir z.B. den Vektor $(1,-1,1,-1)$ nehmen.

Für den Eigenwert $\lambda_2=4$ müssen wir

$$(A-4E)^2=\begin{pmatrix}-8&16&-8&16\\ -16&24&-16&24\\ -8&16&-8&16\\ -16&24&-16&24\end{pmatrix}$$

betrachten. Subtraktion von zweimal der ersten Zeile von der zweiten zeigt, daß die zweite und die vierte Komponente jedes Hauptvektors gleich sein müssen; alsdann zeigt jede der vier Gleichungen, daß auch die erste und die dritte entgegengesetzt gleich sein müssen. Ein auf dem Eigenvektor $(1,-1,-1,1)$ senkrecht stehender Vektor mit dieser Eigenschaft ist beispielsweise $(1,1,-1,-1)$.

Damit können wir die Vektoren

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1\\-1\\1\\-1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1\\-1\\-1\\1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 1\\1\\-1\\-1 \end{pmatrix}$$

als Basis nehmen, bezüglich derer die Matrix Dreiecksgestalt hat.

Um diese Dreiecksgestalt zu bestimmen, müssen wir noch nachrechnen, wohin die beiden Hauptvektoren abgebildet werden, die keine Eigenvektoren sind:

$$A\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 1 & -5\\ 1 & -1 & 3 & -3\\ 1 & -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\\-1\\1\\-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\\8\\8\\8 \end{pmatrix} = 0\vec{b}_2 + 8\vec{b}_1$$

und

$$A\vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 1 & -5\\ 1 & -1 & 3 & -3\\ 1 & -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\\1\\-1\\-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\8\\0\\-8 \end{pmatrix} = 4\vec{b}_4 - 4\vec{b}_3\,,$$

die gesuchte Dreiecksgestalt ist damit

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

d) Läßt sich auch eine Orthonormalbasis finden, bezüglich derer A Dreiecksgestalt hat?

Lösung: Die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ und $\vec{b}_4$ sind bereits orthogonal zueinander; normiert man sie auf Länge eins, erhält man so eine Orthonormalbasis. Da alle vier Vektoren die Länge zwei haben, bilden die Vektoren $\frac{1}{2}\vec{b}_1, \frac{1}{2}\vec{b}_2, \frac{1}{2}\vec{b}_3$ und $\frac{1}{2}\vec{b}_4$ eine Orthonormalbasis.

e) Berechnen Sie die Matrizen $e^{\Delta t}$ und e^{At}! *Hinweis:* Was wissen Sie über Matrizen, deren Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis bilden? Was gilt bei Orthogonalbasen?

Lösung: Wir schreiben

$$\Delta = D + N \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

offensichtlich ist N^2 die Nullmatrix. Da nach der allgemeinen Theorie (und wie man auch trivialerweise sieht) $DN = ND$ ist, folgt $e^{\Delta t} = e^{Dt}e^{Nt} = e^{Dt}(E + Nt)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{4t} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8t & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -4t\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8t & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{4t} & -4e^{4t}\\ 0 & 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Mit der Matrix $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ist $e^{At} = Be^{\Delta t}B^{-1}$; wir brauchen also B^{-1}.

Diese Matrix kann man entweder mit dem GAUSS-Algorithmus bestimmen, oder aber sich daran erinnern, daß für eine Matrix, deren Spalten eine Orthonormalbasis bilden, die inverse Matrix einfach gleich der transponierten ist. Also ist

$$B^{-1} = {}^tB = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das elementare, aber unangenehme Ausmultiplizieren ergibt schließlich e^{At} als

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+2t+\frac{1}{2}e^{4t}-te^{4t} & -te^{4t}-2t & -\frac{1}{2}e^{4t}+\frac{1}{2}+2t+te^{4t} & te^{4t}-2t \\ 2t+te^{4t} & \frac{1}{2}+te^{4t}+\frac{1}{2}e^{4t}-2t & 2t-te^{4t} & -te^{4t}-\frac{1}{2}e^{4t}+\frac{1}{2}-2t \\ -\frac{1}{2}e^{4t}+\frac{1}{2}+2t+te^{4t} & te^{4t}-2t & \frac{1}{2}+2t+\frac{1}{2}e^{4t}-te^{4t} & -te^{4t}-2t \\ 2t-te^{4t} & -te^{4t}-\frac{1}{2}e^{4t}+\frac{1}{2}-2t & 2t+te^{4t} & \frac{1}{2}+te^{4t}+\frac{1}{2}e^{4t}-2t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ mit den Anfangsbedingungen $\vec{y}(0) = \vec{v}$ für

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Nach der allgemeinen Theorie ist $\vec{y}(t) = e^{At}\vec{v}$. Die Matrix A ist bereits eine Dreiecksmatrix in Blockgestalt, wobei in jedem einzelnen Block die Diagonaleinträge konstant sind. Schreiben wir daher

$$A = D + N \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so kommutieren D und N, d.h. $e^{At} = e^{Dt}e^{Nt}$.

Die Matrix N bildet den zweiten Basisvektor ab auf den ersten, den vierten auf zweimal den dritten und den fünften auf die Summe von zweimal dem vierten plus dem dritten Basisvektor; die restlichen Basisvektoren werden auf den Nullvektor abgebildet. Somit bildet N^2 den fünften Basisvektor ab auf viermal den dritten und die restlichen auf den Nullvektor, und N^3 bildet alles auf null ab. Also ist $e^{Nt} = E + Nt + \frac{1}{2}N^2t^2$, konkret

$$e^{Nt} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2t & t+2t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix},$$

das Produkt ist

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} & te^{-3t} & (t+2t^2)e^{-3t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-3t} & 2te^{-3t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y}(t) = e^{At}\vec{v} = \begin{pmatrix} 3e^{-2t} \\ 0 \\ -2e^{-3t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Wie verhält sich diese Lösung für $t \to \infty$?

Lösung: Da sowohl e^{-2t} als auch e^{-3t} gegen Null gehen, konvergiert der Lösungsvektor gegen den Nullvektor des $\mathbb{R}^5$.

c) Ist dieses Verhalten stabil gegenüber kleinen Veränderungen der Anfangsbedingungen?

Lösung: Ja, denn auch bei Störungen der Anfangsbedingungen wird höchstens ein Polynom mal einer Exponentialfunktion mit negativem Koeffizienten im Exponenten addiert, und die geht gegen null für $t \to \infty$.

Aufgabe 7: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 25y(t) = 60\cos 5t$!

Lösung: Die homogene Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 25y(t) = 0$ ist offensichtlich die Gleichung einer gedämpften Schwingung. Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 6\lambda + 25 = (\lambda + 3)^2 + 16 = 0$$

hat die Nullstellen $\lambda = -3 \pm 4i$, also die allgemeine Lösung

$$y(t) = e^{-4t}(C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t \quad \text{mit} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Als nächstes brauchen wir mindestens eine Lösung der inhomogenen Gleichung; da rechts eine reine Schwingung der Kreisfrequenz fünf steht, hat ein Ansatz der Form $y(t) = a\cos 5t + b\sin 5t$ vielleicht Aussicht auf Erfolg. Hier ist

$$\dot{y}(t) = -5a\sin 5t + 5b\cos 5t \quad \text{und} \quad \ddot{y}(t) - 25a\cos 5t - 25b\sin 5t\,.$$

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung ergibt

$$(-25a + 30b + 25a)\cos 5t + (-25b - 30a + 25b)\sin 5t = 60\cos 5t\,;$$

a und b müssen also das lineare Gleichungssystem

$$30b = 60 \quad \text{und} \quad -30a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b = 2 \quad \text{und} \quad a = 0$$

erfüllen. Die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung ist somit

$$y(t) = 2\sin 5t + e^{-3t}(C_1\cos 4t + C_2 \sin 4t)\,.$$

b) Berechnen Sie alle Gleichgewichtspunkte des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = 1 - 2x(t) + x(t)^2 + y(t)^2, \quad \dot{y}(t) = 4x(t) - 4y(t) - z(t)^2, \quad \dot{z}(t) = -4x(t) + y(t) + z(t)^2\,,$$

und bestimmen Sie deren Stabilitätsverhalten in der Linearisierung um den betreffenden Punkt!

Lösung: Für eine Gleichgewichslösung sind $x(t), y(t)$ und $z(t)$ konstant, haben also die Ableitung null; somit muß gelten

$$1 - 2x + x^2 + y^2 = 0, \quad 4x - 4y - z^2 = 0 \quad \text{und} \quad -4x + y + z^2 = 0\,.$$

Die erste Gleichung läßt sich auch schreiben als $(x-1)^2 + y^2 = 0$; dies kann offensichtlich nur gelten, wenn $x = 1$ und $y = 0$ ist.

Einsetzen in die zweite und dritte Gleichung ergibt dann jeweils $z^2 = 4$; somit haben wir die beiden Fixpunkte $(1, 0, 2)$ und $(1, 0, -2)$.

Die Linearisierung des Differentialgleichungssystems um einen der Fixpunkte hat als Matrix die Jacobi-Matrix der rechten Seite, ausgewertet in diesem Fixpunkt. Hier ist die Jacobi-Matrix im Punkt (x, y, z)

$$J(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x-2 & 2y & 0 \\ 4 & -4 & -2z \\ -4 & 1 & 2z \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad J(1,0,\pm 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & \mp 4 \\ -4 & 1 & \pm 4 \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine untere Dreiecksmatrix mit Eigenwerten $0, -4$ und ± 4; für $z = 2$ gibt es also einen positiven Eigenwert, und der Fixpunkt ist nicht stabil. Für $z = -2$ sind alle Eigenwerte nichtpositiv; in y- und in z-Richtung ist der Fixpunkt anziehend, in der x-Richtung, zumindest in der Linearisierung, neutral.

c) Was können Sie über die Stabilität der Fixpunkte für das gegebene System sagen?

Lösung: Für $z = 2$ ist der Fixpunkt instabil; für $z = -2$ können wir wegen des einen Eigenwerts Null nichts genaues sagen: Hier bestimmen Effekte höherer Ordnung das Verhalten.

Aufgabe 8: *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie alle absoluten und relativen Extrema der Funktion $f(x, y) = \sin x^2 \cos y^2$ in der Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 1$!

Lösung: Wir betrachten zunächst den Gradienten

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \cos x^2 \cos y^2 \\ -2y \sin x^2 \sin y^2 \end{pmatrix} .$$

Er verschwindet offensichtlich für $x = 0$; in diesem Fall ist $f(x, y) = 0$ das absolute Minimum, denn als Produkt zweier Quadrate kann $f(x, y)$ keine negativen Werte annehmen. Für $x \neq 0$ verschwindet die erste Komponente nur, wenn $\cos x$ oder $\cos y$ verschwindet. Da der Kosinus im offenen Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ keine Nullstelle hat und x, y für Punkte aus der Einheitskreisscheibe höchstens Betrag eins haben können, ist das nicht möglich.

Extrema mit $x \neq 0$ müssen also auf dem Rand liegen, d.h. auf der durch in solchen Punkten

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

definierten Kreislinie. In den Extrema dort müssen ∇f und ∇g linear abhängig sein; da $\nabla g = \binom{2x}{2y}$ auf der Kreislinie nirgends gleich dem Nullvektor ist, muß es also ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben mit $\nabla f = \lambda \nabla g$, d.h.

$$2x \cos x^2 \cos y^2 = 2\lambda x \quad \text{und} \quad -2y \sin x^2 \sin y^2 = 2\lambda y .$$

Was bei $x = 0$ passiert wissen wir schon; für $x \neq 0$ können wir die erste Gleichung durch $2x$ dividieren und erhalten die Bedingung $\lambda = \cos x^2 \cos y^2$.

Falls y verschwindet, ist die zweite Gleichung automatisch erfüllt und die erste wird zu $\lambda = \cos x^2 = \cos 1$, denn auf dem Einheitskreis ist $x = \pm 1$ für $y = 0$. Somit sind die Punkte $(\pm 1, 0)$ Kandidaten für Extrema; der Funktionswert dort ist $\cos 1$.

Für $y \neq 0$ wird die zweite Gleichung zu $\lambda = -\sin x^2 \sin y^2$, also ist

$$\cos x^2 \cos y^2 = -\sin x^2 \sin y^2 \quad \text{oder} \quad \frac{\cos x^2 \cos y^2}{\sin x^2 \sin y^2} = -1 \quad \text{oder} \quad \cot x^2 = -\tan y^2 .$$

Bekanntlich ist $\cot \alpha = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)$, also ist $\tan(x^2 - \frac{\pi}{2}) = \tan y^2$. Im offenen Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist der Tangens injektiv; daher muß $x^2 - \frac{\pi}{2} = y^2$ sein oder $x^2 - y^2 = \frac{\pi}{2}$. Gleichzeitig muß $x^2 + y^2 = 1$ sein; Addition der beiden Gleichungen führt auf $x^2 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$, was im Einheitskreis nicht möglich ist.

Somit sind die Punkte $(\pm 1, 0)$ die einzigen Extrema mit $x \neq 0$ und müssen damit die Maxima sein, die auf der abgeschlossen und beschränkten Kreisscheibe ja auf jeden Fall existieren.