Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

4. Februar 2006

Scheinklausur Höhere Mathematik II

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Finden Sie eine komplexe Zahl z mit $z^2 = i$!

2) $f(z) = e^{\cos z}$ ist eine holomorphe Funktion.

3) Was ist das Residuum von $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$ an der Stelle $z = 1$?

4) *Richtig oder falsch:* Jede positiv definite Matrix ist invertierbar

5) *Richtig oder falsch:* Ist die Matrix A invertierbar, so ist $e^{(A^{-1})}$ invers zu e^A.

6) Welche Nullstellen hat das Polynom $x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 2$?

7) *Richtig oder falsch:* Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = 3\sqrt[3]{y(t)^2}$ mit $y(0) = 0$ hat genau eine Lösung.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{8x^2}{x^4+4}\,dx$!

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

Sei $f(t) = 1 - t^2$ für $-1 < t \le 1$, periodisch fortgesetzt mit Periode zwei.

a) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-5, 5]$!

b) Ist f gerade, ungerade oder keins von beiden?

c) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f !

d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert diese gegen $f(t)$? Wohin konvergiert sie sonst?

e) Für welche $t \in \mathbb{R}$ tritt das Gibbs-Phänomen auf?

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*

Berechnen Sie die Ableitung im Distributionensinn der Funktion $f(t) = (t - [t])^2$, wobei $[t]$ die größte ganze Zahl $\le t$ bezeichnet!

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $f(t) = \begin{cases} t^2 - 100 & \text{für } |t| \le 10 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ in reeller Form!

b) $g(t)$ sei überall dort, wo f differenzierbar ist, gleich der Ableitung von f; ansonsten sei $g(t) = 0$. Bestimmen Sie g sowie die Fourier-Transformierte von g !

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 5: *(8 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt Δ?

d) Läßt sich auch eine Orthonormalbasis finden, bezüglich derer A Dreiecksgestalt hat?

e) Berechnen Sie die Matrizen $e^{\Delta t}$ und e^{At}! *Hinweis:* Was wissen Sie über Matrizen, deren Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis bilden? Was gilt bei Orthogonalbasen?

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ mit den Anfangsbedingungen $\vec{y}(0) = \vec{v}$ für

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Wie verhält sich diese Lösung für $t \to \infty$?

c) Ist dieses Verhalten stabil gegenüber kleinen Veränderungen der Anfangsbedingungen?

Aufgabe 7: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 25y(t) = 60\cos 5t$!

b) Berechnen Sie alle Gleichgewichtspunkte des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = 1-2x(t)+x(t)^2+y(t)^2, \quad \dot{y}(t) = 4x(t)-4y(t)-z(t)^2, \quad \dot{z}(t) = -4x(t)+y(t)+z(t)^2,$$

und bestimmen Sie deren Stabilitätsverhalten in der Linearisierung um den betreffenden Punkt!

c) Was können Sie über die Stabilität der Fixpunkte für das gegebene System sagen?

Aufgabe 8: *(5 Punkte)*

Bestimmen Sie alle absoluten und relativen Extrema der Funktion $f(x,y) = \sin x^2 \cos y^2$ in der Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 1$!

Formelanhang

$$\int t^2 \cos \omega t = \frac{(\omega t)^2 - 2}{\omega^3} \sin \omega t + \frac{2t}{\omega^2} \cos \omega t, \quad \int t^2 \sin \omega t = \frac{2 - (\omega t)^2}{\omega^3} \cos \omega t + \frac{2t}{\omega^2} \sin \omega t,$$

$$\int t^2 e^{at}\, dt = \frac{(at)^2 - 2at + 2}{a^3} e^{at}$$

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Samstag, dem 4. Februar 2006, um 13^{00} Uhr