Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515
A5, Zimmer C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 19. Januar 2006

a) Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils an, wo die Lösungen existieren:

$$\begin{array}{llr}
\dot y(t) = \dfrac{t}{y(t)} & \text{mit}\quad y(0)=3 \quad\text{und mit}\quad y(0)=-3 & (1)\\
\dot y(t) = \sin^2 t\cdot\cos^2 y(t) & \text{mit}\quad y(0)=\dfrac{\pi}{4} & (2)\\
\dot y(t) = 1+y(t)^2 & \text{mit}\quad y(0)=0 \quad\text{und mit}\quad y(0)=1 & (3)\\
y(t)\,\dot y(t) + \big(1+y(t)^2\big)\sin t = 0 & \text{mit}\quad y(0)=1 & (4)
\end{array}$$

Lösung: Hier geht es in allen Fällen um Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen.

Unter der Anfangsbedingung $y(0)=3$ ist

$$\dot y(t) = \frac{t}{y(t)} \iff y(t)\dot y(t) = t$$

äquivalent zu

$$\int_3^y \eta\,d\eta = \int_0^t \tau\,d\tau \quad\text{oder}\quad \frac{y^2}{2}-\frac{9}{2}=\frac{t^2}{2}\,.$$

Multiplikation mit zwei und Auflösen nach y macht daraus $y=\sqrt{9+t^2}$, denn wegen der Anfangsbedingung $y(0)=3$ kommt für die Wurzel nur das positive Vorzeichen in Frage.

Ist dagegen $y(0)=-3$, so müssen wir zwar links ab -3 integrieren, bekommen aber für y^2 trotzdem dasselbe Ergebnis, da auch $(-3)^2=3^2$ ist. Beim Wurzelziehen aber müssen wir jetzt das negative Vorzeichen nehmen, d.h. $y(t)=-\sqrt{9+t^2}$.

$$\dot y(t) = \sin^2 t\cdot\cos^2 y(t) \iff \frac{\dot y(t)}{\cos^2 y(t)} = \sin^2 t$$

wird unter der Anfangsbedingung $y(0)=\frac{\pi}{4}$ äquivalent zu

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^y \frac{d\eta}{\cos^2\eta} = \int_0^t \sin^2\tau\,d\tau \quad\text{oder}\quad \tan y - \tan\frac{\pi}{4} = \frac{t}{2}-\frac{1}{2}\sin t\cos t\,.$$

Da $\pi/4$ im Winkelmaß 45° sind, ist $\tan\frac{\pi}{4}=1$, also $y(t)=\arctan\left(1+\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\sin t\cos t\right)$.

$$\dot y(t) = 1+y(t)^2 \iff \frac{\dot y(t)}{1+y(t)^2} = 1$$

wird unter der Nebenbedingung $y(0)=a$ zu

$$\int_a^y \frac{d\eta}{1+\eta^2} = \int_0^t d\tau \quad\text{oder}\quad \arctan y - \arctan a = t\,.$$

Da $\arctan 0 = 0$ und $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ ist, folgt

$$y(t) = \begin{cases} \tan t & \text{für } y(0) = 0 \\ \tan(t + \frac{\pi}{4}) & \text{für } y(0) = 1 \end{cases}.$$

$$y(t)\dot y(t) + \left(1 + y(t)^2\right) \sin t = 0 \iff \frac{y(t)\dot y(t)}{1 + y(t)^2} = -\sin t$$

wird unter der Nebenbedingung $y(0) = 1$ äquivalent zu

$$\int_1^y \frac{\eta\, d\eta}{1 + \eta^2} = -\int_0^t \sin\tau\, d\tau \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}\left((\ln(1 + y^2) - \ln 2\right) = \cos t - 1\,.$$

(Beim ersten Integrand ist der zweifache Zähler Ableitung des Nenners.) Damit ist

$$\ln(1 + y(t)^2) = 2\cos t - 2 + \ln 2 \quad \text{und} \quad y(t) = \sqrt{2e^{2\cos t - 2} - 1}\,.$$

b) 1960 wurde anhand der damals vorliegenden Daten (von drei amerikanischen Elektrotechnikern) vorgeschlagen, daß die Weltbevölkerung $N(t)$ zum Zeitpunkt t gemäß dem Gesetz $\dot N(t) = aN(t)^b$ wachsen sollte mit $a > 0$ und $b > 1$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung!

Lösung: Wir schreiben die Gleichung um als $N(t)^{-b}\dot N(t) = a$; durch Integration wird daraus

$$\frac{N(t)^{1-b}}{1-b} = at + C \quad \text{oder} \quad N(t)^{1-b} = (at + C)(1 - b)\,.$$

Da $1 - b$ negativ ist, $N(t)$ aber für jede realistische Lösung positiv, muß $at + C$ negativ sein. Schreiben wir $C = -at_0$ mit einer neuen Integrationskonstante t_0, so bekommen wir

$$N(t)^{1-b} = a(b - 1)(t_0 - t) \quad \text{und} \quad N(t) = \frac{1}{\left(a(b-1)\right)^{\frac{1}{b-1}}} \cdot \frac{1}{(t_0 - t)^{\frac{1}{b-1}}}\,,$$

wobei der Exponent $\frac{1}{b-1}$ eine positive Zahl ist.

c) Diskutieren Sie das qualitative Verhalten der Lösungsfunktionen!

Lösung: Wesentlich ist natürlich nur der zweite Faktor; der erste ist einfach eine Konstante. Offensichtlich geht die Lösung für $t \to t_0$, also zu einem endlichen Zeitpunkt gegen unendlich; nach diesem Modell wird also die Weltbevölkerung zu einem endlichen Zeitpunkt unendlich groß.

d) Welche Bedingung muß die Integrationskonstante C mindestens erfüllen, falls diese Gleichung für den gegenwärtigen Zeitpunkt ein realistisches Modell sein sollte?

Lösung: Offensichtlich muß $t_0 > 2005{,}1$ sein, denn noch ist die Weltbevölkerung endlich. Viel Zeit bleibt aber nicht mehr: Nach FOERSTER, MORA und AMIOT ist die beste Schätzung für t_0 Freitag, der 13. November 2026, um 13^{13} Uhr; siehe ihre Arbeit *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026* in Science **138**, November 1960, Seite 1291–1295.

e) Finden Sie eine Differentialgleichung, die alle Hyperbeln $y^2 - t^2 = C$ als Lösungskurven hat!

Lösung: Wir suchen eine Differentialgleichung, deren Lösungen sich in der Form

$$F(y, t) = y^2 - t^2 = C$$

schreiben lassen. Da die Ableitung einer Konstanten nach der Zeit verschwindet, müssen wir dazu einfach $F\big(y(t)\big)$ nach t ableiten und auf Null setzen:

$$\frac{d}{dt}F\big(y(t)\big) = \frac{d}{dt}\big(y(t)^2 - t^2\big) = 2y(t)\dot{y}(t) - 2t = 0 \quad \text{oder} \quad y(t)\dot{y}(t) - t = 0\,.$$

f) Finden Sie eine Differentialgleichung, die alle Lemniskaten $(y^2+t^2)^2 = 2C^2(t^2-y^2)$ als Lösungskurven hat! *(Hinweis: Hier kann man viel kürzen!)*

Lösung: Um dies auf die Form $F(y,t) =$ Konstante zu bringen, müssen wir durch $t^2 - y^2$ dividieren und erhalten

$$F(y,t) = \frac{(y^2+t^2)^2}{t^2-y^2} = 2C^2\,.$$

Diese Funktion leiten wir besser nicht als ganzes ab, sondern berechnen die partiellen Ableitungen nach y und t jeweils für sich; sobald wir diese kennen, haben wir auch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial y}F(y(t),y)\dot{y}(t) + \frac{\partial}{\partial t} = 0\,.$$

Hier ist

$$\frac{\partial}{\partial y}(y,t) = \frac{4(t^2-y^2)(y^2+t^2)y + 2y(y^2+t^2)^2}{(t^2-y^2)^2} = \frac{2y(y^2+t^2)(3t^2-y^2)}{(y^2-t^2)^2}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t}(y,t) = \frac{4t(t^2-y^2)(y^2+t^2) - 2t(y^2+t^2)^2}{(t^2-y^2)^2} = \frac{2t(y^2+t^2)(t^2-3y^2)}{(y^2-t^2)^2}\,,$$

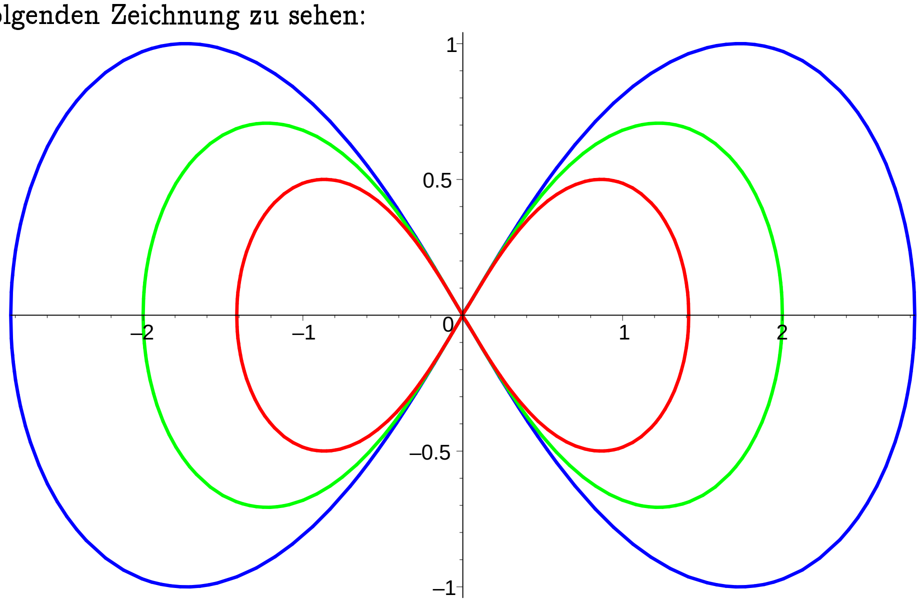
wir haben also die Differentialgleichung

$$\frac{2y(t)\big(y(t)^2+t^2\big)\big(3t^2-y(t)^2\big)}{\big(y(t)^2-t^2\big)^2}\dot{y}(t) = \frac{2t\big(y(t)^2+t^2\big)\big(t^2-3y(t)^2\big)}{\big(y(t)^2-t^2\big)^2}\,,$$

die erheblich schöner aussieht, wenn wir sie noch mit $\frac{\big(t^2-y(t)^2\big)^2}{2\big(t^2+y(t)^2}\big)$ multiplizieren zu

$$y(t)\big((3t^2-y(t)^2)\big)\dot{y}(t) + t\big(t^2-3y(t)^2\big) = 0\,.$$

Die Lösungskurven für $C = 1$ *(innere Kurve)*, $C = \sqrt{2}$ und $C = 2$ *(äußere Kurve)* sind in der folgenden Zeichnung zu sehen:



g) Hat diese Differentialgleichung auch noch weitere Lösungskurven?

Lösung: Ja, natürlich: Die Kurven, bei denen C^2 durch einen negativen Wert ersetzt wird, sind auch Lösungen, wenn auch keine sehr verschiedenen: Sie entstehen aus den angegebenen durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden.

h) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen wenn möglich explizit, und diskutieren Sie ansonsten, wo die implizite Lösung eindeutig nach y aufgelöst werden kann!

$$\begin{array}{llll}
t\dot{y}(t)+y(t)=0 & (1) & (1+t^2)\dot{y}(t)+2ty(t)=0 & (2)\\
t\dot{y}(t)+y(t)+e^t=0 & (3) & \big((te^{y(t)}+2y(t)\big)\dot{y}(t)+e^{y(t)}=0 & (4)\\
8ty(t)\sin\big(4y(t)^2\big)\dot{y}(t)=\cos\big(4y(t)^2\big) & (5) & \big(t\cos y(t)\big)+\sin y(t)=0 & (6)\\
y(t)\sqrt{1-t^2}\dot{y}(t)=t & (7) & \big(ty(t)-t\big)\dot{y}(t)+t=0 & (8)\\
\big(3t+3-y(t)\big)\dot{y}(t)+y=0 & (9) & \big(y(t)^2-t^2\big)\dot{y}(t)+2ty(t)=0 & (10)
\end{array}$$

Lösung: Wir wählen a, b jeweils so, daß $a\big(y(t),t\big)\dot{y}(t)+b\big(y(t),t\big)=0$ die gegebene Gleichung ist. Für (1) ist also $a(y,t)=t$ und $b(y,t)=y$, also $a_t=b_y=1$, so daß die Gleichung exakt ist. Wir suchen eine Funktion $F(y,t)$ mit $F_y=a$ und $F_t=b$; das ist hier offensichtlich $F(y,t)=yt$. Die Lösungskurven von (1) sind also die Kreise $y(t)^2+t^2=r^2$. (Negative Konstanten führen hier offensichtlich zu keiner Lösung.) Die Kreisgleichung kann bekanntlich überall dort eindeutig nach $y(t)$ aufgelöst werden, wo y nicht verschwindet.
Bei (2) ist $a(y,t)=1+t^2$ und $b(y,t)=2ty$, also $y_t=2t=b_y$, so daß auch diese Gleichung exakt ist. Integration ergibt $F(y,t)=(1+t^2)y$, wir haben also die Lösungskurven $y(t)=\dfrac{C}{1+t^2}$.
Bei (3) ist $a(y,t)=t$ und $b(y,t)=y+e^t$, also $a_t=1=b_y$; auch (3) ist also exakt. Hier ist $F(y,t)=ty+e^t$, also haben wir die Lösungen $y(t)=\dfrac{C-e^t}{t}$.
Auch für (4) mit $a(y,t)=te^y+2y$ und $b(y,t)=e^y$ ist die Exaktheitsbedingung $a_t=b_y$ erfüllt; wir erhalten $F(y,t)=te^y+y^2$, haben also die Lösungskurven $te^{y(t)}+y(t)^2=C$, wobei C offensichtlich nicht negativ sein kann. Eindeutige Auflösbarkeit liegt nach dem Satz über implizite Funktionen überall dort vor, wo $F_y(y,t)=a(y,t)=te^y+2y$ nicht verschwindet.
Bei (5) ist $a(y,t)=8ty\sin 4y^2$ und $b(y,t)=-\cos 4y^2$, also $a_t=8y\sin 4y^2=b_y$. Integration von b über die darin nicht vorkommende Variable t ergibt $F(y,t)=-t\cos 4y^2+g(y)$; leiten wir dies ab nach y, sehen wir, daß wir bereits mit $g(y)\equiv 0$ die Funktion a erhalten. Also sind die Lösungskürven gegeben durch $t\cos 4y(t)^2=C$, was für $t=0$ zu nichts führt, und für $t\neq 0$ zu $y(t)=\dfrac{1}{4}\sqrt{\arccos\dfrac{C}{t}}$.
Bei (6) ist $a(y,t)=t\cos y$ und $b(y,t)=\sin y$. Offensichtlich ist $a_t=b_y$, und wir können $F(y,t)=t\sin y$ setzen. Die Lösungskurven sind also $t\sin y(t)=C$, was wieder für $t\neq 0$ aufgelöst werden kann zu $y(t)=\arcsin\dfrac{C}{t}$ Bei (7) ist $a(y,t)=y\sqrt{1-t^2}$ und $b(y,t)=-t$; offensichtlich ist $b_y=0$ von a_t verschieden; die Differentialgleichung ist also nicht exakt. Die Funktion

$$\frac{b_y-a_t}{a}=-\frac{\frac{yt}{\sqrt{1-t^2}}}{y\sqrt{1-t^2}}=\frac{-t}{1-t^2}$$

allerdings hängt nur von t ab, also führt ihre Stammfunktion $-\ln\sqrt{1-t^2}$ zum integrierenden Faktor

$$e^{-\ln\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Multiplizieren wir die Gleichung damit, erhalten wir

$$y(t)\dot{y}(t)=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}},$$

was wir wahlweise als Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen oder als exakte Differentialgleichung lösen können. In beiden Fällen ist die Hauptschwierigkeit die Berechnung von

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\sqrt{1-t^2}\,.$$

Wie meist bei Ausdrücken wie $\sqrt{1-t^2}$ bietet sich hier eine Substitution der Form $t = \sin u$ und damit $dt = \cos u\,du$ an, denn dann ist $\sqrt{1-t^2} = \cos u$ und

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{\sin u}{\cos u}\cos u\,du = \int \sin u\,du = -\cos u = -\sqrt{1-\sin^2 u} = -\sqrt{1-t^2}\,.$$

Die Lösungskurven der Differentialgleichung haben somit die Form

$$\frac{y^2}{2} = C - \sqrt{1-t^2} \quad \text{oder} \quad y(t) = \pm\sqrt{C - 2\sqrt{1-t^2}}\,,$$

wobei das Vorzeichen in allen Punkten mit $y \neq 0$ eindeutig bestimmt ist.

Auch bei (8) mit $a(y,t) = ty - t$ und $b(y,t) = t$ ist $a_t \neq b_y$, aber

$$\frac{b_y - a_t}{a} = \frac{1-y}{ty-t} = -\frac{1}{t}$$

hängt nur von t ab, es gibt also einen integrierenden Faktor

$$e^{-\int \frac{dt}{t}} = e^{-\ln t} = \frac{1}{t}\,.$$

Die damit multiplizierte Gleichung ist $\big(y(t)-1\big)\dot y(t) + 1 = 0$; da t hierin nicht explizit vorkommt, sehen wir sofort die Lösung $\frac{1}{2}y(t)^2 - y(t) + t = C$. Quadratische Ergänzung macht daraus

$$\big(y(t)-1\big)^2 + 2t = 2C + 1 \underset{\text{def}}{=} \widetilde{C} \quad \text{oder} \quad y(t) = 1 \pm \sqrt{\widetilde{C} - 2t}\,.$$

Bei (9) ist $a = 3t + 3 - y$ und $b = y$, also $a_t = 3 \neq 1 = b_y$.

$$\frac{b_y - a_t}{a} = \frac{1-3}{3t+3-y}$$

hängt offensichtlich sowohl von t als auch von y ab, es gibt also keinen integrierenden Faktor der Form $\varphi(t)$. Dafür hängt

$$\frac{a_t - b_y}{b} = \frac{3-1}{y} = \frac{2}{y}$$

nur von y ab,

$$\psi(y) = e^{\int \frac{2\,dy}{y}} = e^{2\ln y} = e^{\ln y^2} = y^2$$

ist also ein integrierender Faktor. Nach Multiplikation damit wird die Gleichung zu

$$\big(3t + 3 - y(t)\big)y(t)^2\dot y(t) + y(t)^3 = 0\,.$$

Eine Funktion $F(y,t)$ mit $F_y = (3t+3-y)y^2 = -y^3 + 3(t+1)y^2$ und $F_t = y^3$ ist offensichtlich $F(y,t) = -\frac{y^4}{4} + (t+1)y^3$; die gesuchten Lösungskurven haben also die Gleichungen $(t+1-y)y^3 = C$. Sie sind dort eindeutig nach y auflösbar, wo die partielle Ableitung $F_y = (3t+3-y)y^2$ nicht verschwindet, d.h. wo $y \neq 0$ und $y \neq 3t+3$ ist.

Bei (10) schließlich ist $a(y,t) = y^2 - t^2$ und $b(y,t) = 2ty$, also $a_t = -2t \neq 2t = b_y$. Wie in (9) hängt

$$\frac{a_t - b_y}{b} = \frac{-2t-2t}{2ty} = -\frac{2}{y}$$

nur von y ab, wir haben also den integrierenden Faktor

$$e^{-\int \frac{2\,dy}{y}} = e^{-2\ln y} = e^{-\ln y^2} = \frac{1}{y^2}\,.$$

Damit multipliziert wird die Gleichung zur exakten Differentialgleichung

$$\left(1 - \frac{t^2}{y^2}\right)\dot{y}(t) + \frac{2t}{y(t)} = 0\,,$$

und dazu findet wir leicht die Stammfunktion $F(y,t) = y + \frac{t^2}{y}$. Die Lösungskurven haben also die Gleichungen

$$y + \frac{t^2}{y} = C \quad \text{oder} \quad y^2 - Cy + t^2 = (y - \tfrac{1}{2}C)^2 = \tfrac{1}{4}C^2 \quad \text{d.h.} \quad y(t) = \frac{C \pm \sqrt{C^2 - 4t}}{2}\,.$$

Probleme mit der eindeutigen Lösbarkeit gibt es, wenn die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ das Vorzeichen der Wurzel nicht eindeutig festlegt, wenn also $C^2 - 4t_0$ verschwindet. Dann ist $y(t_0) = \frac{1}{2}C$, d.h. Anfangsbedingungen der Form $y(t_0) = \pm\sqrt{t_0}$ führen zu nichteindeutigen Lösungen.

i) In einem Ökosystem lebe eine Tierart, die sich nach der logistischen Differentialgleichung $\dot{x}(t) = \lambda x(t)\big(M - x(t)\big)$ vermehrt. Nun komme eine zweite Art, die dieselben Resourcen nutzt und sich gemäß der Gleichung $\dot{y}(t) = \mu y(t)\big(N - y(t)\big)$ mit $N > M$ vermehrt. Da sich die beiden Arten gegenseitig Resourcen wegnehmen, gelten für das Gesamtsystem nun die Differentialgleichungen $\dot{x}(t) = \lambda x(t)\big(M - x(t) - y(t)\big)$ und $\dot{y}(t) = \mu y(t)\big(N - x(t) - y(t)\big)$. Bestimmen Sie alle Fixpunkte dieses System, und untersuchen Sie deren Stabilität!

Lösung: Für einen Fixpunkt $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ muß gelten

$$\lambda u(M - u - v) = 0 \quad \text{und} \quad \mu v(N - u - v) = 0\,.$$

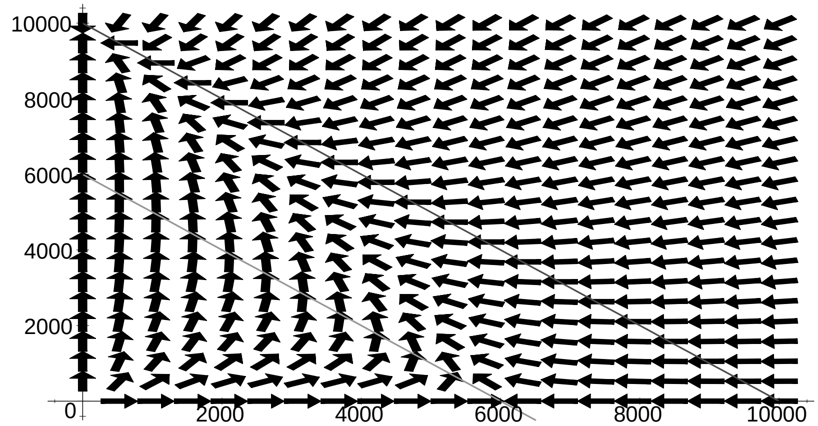
Damit gibt es die Fixpunkte $(0,0)$, $(0,N)$ und $(M,0)$.
Die JACOBI-Matrix von $F(x,y) = \binom{\lambda x(M-x-y)}{\mu y(N-x-y)}$ ist

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} \lambda(M - 2x - y) & -\lambda x \\ -\mu y & \mu(N - x - 2y) \end{pmatrix}, \quad J_F(0,0) = \begin{pmatrix} \lambda M & 0 \\ 0 & \mu N \end{pmatrix},$$
$$J_F(0,N) = \begin{pmatrix} \lambda(M - N) & 0 \\ -\mu N & -\mu N \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J_F(M,0) = \begin{pmatrix} -\lambda M & -\lambda M \\ 0 & \mu(N - M) \end{pmatrix}.$$

Da λM und μN positiv sind, ist $(0,0)$ also instabil. Bei $(0,N)$ haben wir die beiden Eigenwerte $-\mu N < 0$ und $\lambda(M-N) < 0$, also ist dieser Punkt stabil. Für $(M,0)$ schließlich ist der Eigenwert $-\lambda M$ negativ, aber $\mu(N - M)$ positiv, das ist also ein Sattelpunkt.

j) Skizzieren Sie grob das Vektorfeld zum obigen Differentialgleichungssystem, und folgern Sie daraus, wie sich das System langfristig entwickeln wird!

Lösung: Für $N = 10\,000$ und $M = 6\,000$ ergibt ist das Vektorfeld hier eingezeichnet. Lösungskurven, die unterhalb der ersten schrägen Geraden beginnen, überqueren diese Gerade, und Lösungskurve, die zwischen den beiden Geraden oder oberhalb der oberen beginnen, gehen gegen $(0,N)$. Die erfolgreichere Art behauptet sich also, die andere stirbt aus.



k) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslösungen des folgenden Systems:

$$\dot{x}(t) = x(t)^2 + y(t)^2 - z(t)^2\,, \quad \dot{y}(t) = x(t)^2 - y(t)^2 + z(t)^2 \quad \text{und} \quad \dot{z}(t) = -x(t) + y(t)^2 - 2z(t)$$

Lösung: Wir haben das nichtlineare Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad x^2 - y^2 + z^2 = 0 \quad \text{und} \quad -x + y^2 - 2z = 0\,.$$

Addition der ersten beiden Gleichungen führt auf $x^2 = 0$, also muß x verschwinden und $y = \pm z$. Dies in die dritte Gleichung eingesetzt zeigt, daß $z^2 = 2z$ ist, also $z = 0$ oder $z = 2$ ist. Es gibt also die drei Gleichgewichtslösungen $(0,0,0)$ und $(0,\pm 2, 2)$.

l) Zeigen Sie sich, daß der Nullpunkt Fixpunkt der folgenden Systeme ist, und bestimmen Sie jeweils sein Stabilitätsverhalten:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -2x(t) + y(t)^2 + x(t)z(t) \\ \dot{y}(t) &= 3x(t)^2 - y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) &= -2x(t)z(t) - y(t) - z(t) \end{aligned} \qquad (1) \qquad\qquad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2x(t) + y(t)^2 + x(t)z(t) \\ \dot{y}(t) &= -3x(t)^2 - y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) &= -2x(t)z(t) - y(t) - z(t) \end{aligned} \qquad (2)$$

Lösung: Bei beiden Systemen ist klar, daß $x(t) \equiv y(t) \equiv z(t) \equiv 0$ das System erfüllt, der Nullpunkt ist also eine Gleichgewichtslösung. Die Linearisierung um $(0,0,0)$ erhalten wir einfach durch Weglassen aller nichtlinearer Terme; bei (1) führt das auf

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -2x(t) \\ \dot{y}(t) &= -y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) &= -y(t) - z(t) \end{aligned} \tag{11'}$$

Die Matrix dazu ist $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ mit i

$$\det(A - \lambda E) = (-2-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 2)\,;$$

die Eigenwerte sind also -2 und $-1 \pm i$. Da alle drei negativen Realteil haben, ist der Nullpunkt stabil.

Im Falle von (2) erhalten wir genau dieselbe Linearisierung um den Nullpunkt, also ist dieser auch hier stabil.