Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 19. Januar 2006

a) Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils an, wo die Lösungen existieren:

$$\dot y(t) = \frac{t}{y(t)} \quad \text{mit} \quad y(0)=3 \quad \text{und mit} \quad y(0)=-3 \qquad (1)$$
$$\dot y(t) = \sin^2 t\cdot\cos^2 y(t) \quad \text{mit} \quad y(0)=\frac{\pi}{4} \qquad (2)$$
$$\dot y(t) = 1+y(t)^2 \quad \text{mit} \quad y(0)=0 \quad \text{und mit} \quad y(0)=1 \qquad (3)$$
$$y(t)\,\dot y(t) + \bigl(1+y(t)^2\bigr)\sin t = 0 \quad \text{mit} \quad y(0)=1 \qquad (4)$$

b) 1960 wurde anhand der damals vorliegenden Daten (von drei amerikanischen Elektrotechnikern) vorgeschlagen, daß die Weltbevölkerung $N(t)$ zum Zeitpunkt t gemäß dem Gesetz $\dot N(t) = aN(t)^b$ wachsen sollte mit $a>0$ und $b>1$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung!

c) Diskutieren Sie das qualitative Verhalten der Lösungsfunktionen!

d) Welche Bedingung muß die Integrationskonstante C mindestens erfüllen, falls diese Gleichung für den gegenwärtigen Zeitpunkt ein realistisches Modell sein sollte?

e) Finden Sie eine Differentialgleichung, die alle Hyperbeln $y^2-t^2=C$ als Lösungskurven hat!

f) Finden Sie eine Differentialgleichung, die alle Lemniskaten $(y^2+t^2)^2 = 2C^2(t^2-y^2)$ als Lösungskurven hat! *(Hinweis: Hier kann man viel kürzen!)*

g) Hat diese Differentialgleichung auch noch weitere Lösungskurven?

h) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen wenn möglich explizit, und diskutieren Sie ansonsten, wo die implizite Lösung eindeutig nach y aufgelöst werden kann!

$$t\dot y(t)+y(t)=0 \quad (1) \qquad (1+t^2)\dot y(t)+2ty(t)=0 \quad (2)$$
$$t\dot y(t)+y(t)+e^t=0 \quad (3) \qquad \bigl((te^{y(t)}+2y(t)\bigr)\dot y(t)+e^{y(t)}=0 \quad (4)$$
$$8ty(t)\sin\bigl(4y(t)^2\bigr)\dot y(t)=\cos\bigl(4y(t)^2\bigr) \quad (5) \qquad \bigl(t\cos y(t)\bigr)+\sin y(t)=0 \quad (6)$$
$$y(t)\sqrt{1-t^2}\,\dot y(t)=t \quad (7) \qquad \bigl(ty(t)-t\bigr)\dot y(t)+t=0 \quad (8)$$
$$\bigl(3t+3-y(t)\bigr)\dot y(t)+y=0 \quad (9) \qquad \bigl(y(t)^2-t^2\bigr)\dot y(t)+2ty(t)=0 \quad (10)$$

i) In einem Ökosystem lebe eine Tierart, die sich nach der logistischen Differentialgleichung $\dot x(t)=\lambda x(t)\bigl(M-x(t)\bigr)$ vermehrt. Nun komme eine zweite Art, die dieselben Resourcen nutzt und sich gemäß der Gleichung $\dot y(t)=\mu y(t)\bigl(N-y(t)\bigr)$ mit $N>M$ vermehrt. Da sich die beiden Arten gegenseitig Resourcen wegnehmen, gelten für das Gesamtsystem nun die Differentialgleichungen $\dot x(t)=\lambda x(t)\bigl(M-x(t)-y(t)\bigr)$ und $\dot y(t)=\mu y(t)\bigl(N-x(t)-y(t)\bigr)$. Bestimmen Sie alle Fixpunkte dieses System, und untersuchen Sie deren Stabilität!

j) Skizzieren Sie grob das Vektorfeld zum obigen Differentialgleichungssystem, und folgern Sie daraus, wie sich das System langfristig entwickeln wird!

k) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslösungen des folgenden Systems:

$$\dot x(t)=x(t)^2+y(t)^2-z(t)^2\,,\quad \dot y(t)=x(t)^2-y(t)^2+z(t)^2 \quad \text{und} \quad \dot z(t)=-x(t)+y(t)^2-2z(t)$$

l) Zeigen Sie sich, daß der Nullpunkt Fixpunkt der folgenden Systeme ist, und bestimmen Sie jeweils sein Stabilitätsverhalten:

$$\begin{aligned}\dot x(t) &= -2x(t)+y(t)^2+x(t)z(t)\\ \dot y(t) &= 3x(t)^2-y(t)+z(t)\\ \dot z(t) &= -2x(t)z(t)-y(t)-z(t)\end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}\dot x(t) &= 2x(t)+y(t)^2+x(t)z(t)\\ \dot y(t) &= -3x(t)^2-y(t)+z(t)\\ \dot z(t) &= -2x(t)z(t)-y(t)-z(t)\end{aligned} \qquad (2)$$