Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 12. Januar 2006

a) Lösen Sie die Differentialgleichung $y^{(3)}(t) - \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - y(t) = 0$!

b) Lösen Sie die Differentialgleichung $y^{(4)}(t) + 4y^{(3)}(t) + 6\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + y(t) = 0$!

c) Bestimmen Sie Basen sowohl für den reellen als auch den komplexen Lösungsraum der Differentialgleichung $y^{(4)}(t) - 4y^{(3)}(t) + 8\ddot{y}(t) - 8\dot{y}(t) + 4y(t) = 0$!
Hinweis: $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2$

d) Bestimmen Sie die sämtlichen reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 13y(t) = 40\sin 3t \tag{1}$$
$$y^{(3)}(t) + 3\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = \cos t \tag{2}$$
$$y^{(3)}(t) + \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 80\sin 3t \tag{3}$$
$$y^{(4)}(t) - 16y(t) = 80 - 48t \tag{4}$$
$$y^{(4)}(t) + 8\ddot{y}(t) + 16y(t) = 400 \tag{5}$$

e) Lösen Sie die Differenzengleichung $x_n = x_{n-1} - x_{n-2}$ mit $x_0 = 3$ und $x_1 = 5$!

f) Was ist $x_{1\,000\,000}$?

g) Formen Sie das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = 2t \cdot \big(y(t) - 2\big)$ mit $y(0) = 1$ um in eine Fixpunktgleichung, und berechnen Sie die ersten Iterationen! Erraten Sie anhand dieser die Lösungsfunktion, und bestätigen Sie dies durch Einsetzen!

h) Bestimmen Sie die sämtlichen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen und diskutieren Sie deren Langzeitverhalten!

$\dot{y}(t) + 2ty(t) = 4t$	(1)	$\dot{y}(t) + \frac{y(t)}{t} + e^t = 0$	(2)
$\dot{y}(t) = a + bt + cy(t)$	(3)	$(1+t)\dot{y}(t) + y(t) + t^2 + t^3 = 0$	(4)
$\dot{y}(t) + y(t) = 2\sin t$	(5)	$\dot{y}(t) + \sin t\, y(t) = \sin^3 t$	(6)

i) Welche der folgenden Anfangswertprobleme sind eindeutig lösbar?

$$\dot{y}(t) = \cos y(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \tag{1}$$
$$2\dot{y}(t)y(t) = 1 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \tag{2}$$
$$\dot{y}(t) = \tfrac{5}{3}y(t)^{\frac{2}{5}} \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \tag{3}$$
$$\dot{y}(t) = \frac{\sin t \cdot \cos y(t)}{1 + t^8} \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \tag{4}$$
$$\dot{y}(t)^2 = 4y(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \tag{5}$$
$$\dot{y}(t) = \frac{1}{y(t)} \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \tag{6}$$

j) Finden Sie die allgemeine reelle Lösung der folgenden Differentialgleichungen, und überlegen Sie sich, wo t liegen muß, damit diese Lösungen existieren:

$\dot{y}(t) = \dfrac{t^2}{e^{y(t)}}$	(1)	$\dot{y}(t) = \dfrac{e^t}{y(t)^2}$	(2)	$\dot{y}(t) = e^{t+y(t)}$	(3)
$\dot{y}(t) = t^2y(t)^2$	(4)	$\dot{y}(t) = \dfrac{t^2}{y(t)^2}$	(5)	$\dot{y}(t) = \dfrac{1 + y(t)^2}{1 + t^2}$	(6)

Hinweis zu (6): $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$