Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515
A5, Zimmer C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 15. Dezember 2005

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$!

Lösung: Das charakteristische Polynom

$$\det(C - \lambda E) = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$$

hat die beiden Nullstellen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$. Eigenvektoren $\binom{x}{y}$ zum Eigenwert Null erfüllen das Gleichungssystem

$$x + iy = 0 \quad \text{und} \quad -ix + y = 0\,,$$

dessen beide Gleichungen natürlich äquivalent sind. (Sonst wäre Null kein Eigenwert.) Der Eigenraum wird aufgespannt beispielsweise von $\binom{1}{i}$.

Die Matrix $C - 2E = \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$ führt auf das Gleichungssystem

$$-x + iy = 0 \quad \text{und} \quad -ix - y = 0\,,$$

hier wird der Eigenraum also aufgespannt von $\binom{i}{1}$.

b) Gibt es eine Basis von $\mathbb{C}^2$ aus *reellen* Eigenvektoren von C ?

Lösung: *Nein;* da keines der beiden obigen Gleichungssysteme eine nichttriviale reelle Lösung hat, gibt es überhaupt keinen reellen Eigenvektor.

c) Was ist e^C *bzw.* e^{Ct} ?

Lösung: Bezüglich der Basis aus $\binom{1}{i}$ und $\binom{i}{1}$ hat die Multiplikation mit C die Abbildungsmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad e^{Dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\,.$$

Da $C = BDB^{-1}$ ist, wobei B die Matrix mit den beiden Eigenvektoren als Spalten ist, gilt auch $e^{Ct} = Be^{Dt}B^{-1}$. Zur Berechnung von B^{-1} gehen wir in der üblichen Weise nach Gauss vor: In der um die Einheitsmatrix erweiterten Matrix

$$\begin{matrix} 1 & i & & 1 & 0 \\ i & 1 & & 0 & 1 \end{matrix}$$

subtrahieren wir das i-fache der ersten Zeile von der zweiten:

$$\begin{matrix} 1 & i & & 1 & 0 \\ 0 & 2 & & -i & 1 \end{matrix}$$

Sodann dividieren wir diese durch zwei

$$\begin{matrix} 1 & i & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix}$$

und subtrahieren sie von der ersten:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ 0 & 1 & & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix}$$

Da jetzt vorne die Einheitsmatrix steht, ist $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und

$$e^{Ct} = Be^{Dt}B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2t}+1 & i(e^{2t}-1) \\ i(1-e^{2t}) & 1+e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Einsetzen von $t = 1$ liefert

$$e^{C} = Be^{D}B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2}+1 & i(e^{2}-1) \\ i(1-e^{2}) & 1+e^{2} \end{pmatrix}.$$

d) Berechnen Sie $e^{\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}}$!

Lösung: Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $A^2 = -E$, also $A^3 = -A$, $A^4 = E$, $A^5 = A$, und ab dann wiederholt sich alles zyklisch. Insbesondere hat also A^n für gerades n nur auf der Diagonalen nichtverschwindende Einträge und für ungerades n nur auf der Nebendiagonalen. Somit ist

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}A^i t^i = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j}}{(2j)!} & \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} t^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j+1}}{(2j+1)!} & \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j}}{(2j)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man e^{At} auch durch Diagonalisieren berechnen: Das charakteristische Polynom von A ist $\lambda^2 + 1$, hat also die Nullstellen $\pm i$.

$$A \mp iE = \begin{pmatrix} \mp i & -1 \\ 1 & \mp i \end{pmatrix}$$

führt auf dieselben linearen Gleichungssysteme, die wir aus *a)* kennen, d.h. $\binom{1}{i}$ ist Eigenvektor zu $-i$ und $\binom{i}{1}$ zu i. Wir können also mit derselben Matrix B arbeiten wie dort, haben aber jetzt die Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ mit $e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix}$. Dies führt auf

$$e^{At} = Be^{Dt}B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

e) Zeigen Sie: Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist ${}^tAA$ symmetrisch.

Lösung: ${}^t({}^tAA) = {}^tA \cdot {}^t({}^tA) = {}^tAA$.

f) Mit welchen komplexen Zahlen a, b, c wird $\begin{pmatrix} 1 & 1+i & a \\ b & 2 & 3-i \\ 1-2i & c & 3 \end{pmatrix}$ eine HERMITEsche Matrix?

Lösung: Bezeichnen wir die gegebene Matrix mit M, so ist

$${}^tM = \begin{pmatrix} 1 & b & 1-2i \\ 1+i & 2 & c \\ a & 3-i & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overline{{}^tM} = \begin{pmatrix} 1 & \overline{b} & 1+2i \\ 1-i & 2 & \overline{c} \\ \overline{a} & 3+i & 3 \end{pmatrix}.$$

Letzteres ist genau dann gleich M, wenn $a = 1 + 2i$, $b = 1 - i$ und $c = 3 + i$ ist.

g) Welche der folgenden Matrizen A_n sind symmetrisch, welche HERMITEsch? Von welchen wissen Sie, daß $\mathbb{R}^4$ eine Basis aus Eigenvektoren von A_n hat?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \\ 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} i & 2i & 3i & 4i \\ 2i & 3i & 4i & 5i \\ 3i & 4i & 5i & 6i \\ 4i & 5i & 6i & 7i \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -i & i & 1 \\ i & -1 & 1 & -i \\ -i & 1 & 1 & -i \\ 1 & i & i & -1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} i & i & i & i \\ -i & i & -i & i \\ -i & i & i & i \\ -i & -i & -i & i \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Lösung: A_1 ist symmetrisch und HERMITEsch, A_2 und A_3 sind symmetrisch, aber nicht HERMITEsch, A_4 ist HERMITEsch, aber nicht symmetrisch, A_5 weder symmetrisch noch HERMITEsch, da die Diagonaleinträge einer HERMITEschen Matrix reell sein mssen. A_6 ist aus demselben Grund symmetrisch, aber nicht HERMITEsch.

Nach dem Satz aus der Vorlesung gibt es daher zu A_1 und A_4 Basen aus Eigenvektoren. Bei A_6 sind offensichtlich bereits die Vektoren der Standardbasis Eigenvektoren, und wenn man genau hinsieht, ist $A_3 = iA_1$, also gibt es auch zu A_3 eine Basis aus Eigenvektoren, nämlich die zu A_1. Bei den beiden verbleibenden Matrizen ist die Frage nicht einfach ohne Rechnung entscheidbar; mit Rechnung folgt, daß es solche Basen gibt. (Danach war aber nicht gefragt.)

h) Richtig oder falsch: Hat der Hauptraum zum Eigenwert λ die Dimension r, so gibt es mindestens einen Hauptvektor der Stufe r.

Lösung: *Falsch;* einfachstes Gegenbeispiel ist die $r \times r$-Matrix λE, die als Hauptraum den gesamten k^r hat, aber natürlich gibt es keine Hauptvektoren der Stufe zwei oder höher, da jeder Vektoren außer dem Nullvektor Eigenvektor, d.h. Hauptvektor der Stufe eins ist.

i) Richtig oder falsch: Falls es zum Eigenwert λ einen Hauptvektor der Stufe r gibt, hat der Hauptraum mindestens die Dimension r.

Lösung: *Richtig,* denn ist $\vec{v}$ ein Hauptvektor der Stufe r, ist $(A - \lambda E)\vec{v} = A\vec{v} - \lambda\vec{v}$ Hauptvektor der Stufe $r-1$ und entsprechend $(A-\lambda E)^s\vec{v}$ Hauptvektor der Stufe $r-s$, es gibt also Hauptvektoren der Stufen $r-1, r-2, \dots, 1$. Hauptvektoren verschiedener Stufen können unmöglich linear abhängig sein, denn sonst läge der mit der höchsten Stufe, dessen Koeffizient in einer Linearkombination des Nullvektors nicht verschwindet, im Erzeugnis von Hauptvektoren niedrigerer Stufe und hätte daher auch selbst eine niedrigere Stufe. Somit hat der Hauptraum mindestens Dimension r.

j) Richtig oder falsch: Falls die Differenz zweier Hauptvektoren der Stufe r ungleich dem Nullvektor ist, ist sie selbst ein Hauptvektor der Stufe r.

Lösung: *Falsch:* Sie könnte auch ein Hauptvektor niedrigerer Stufe sein, denn die Summe zweier Hauptvektoren der Stufen r und $s < r$ ist ein Hauptvektor der Stufe r.

k) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$!

Lösung: Da die zweite Spalte das negative und die dritte das doppelte der ersten Spalte ist, sieht man sofort, daß null ein (mindestens) doppelter Eigenwert sein muß; zwei linear unabhängige Eigenvektoren dazu sind z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den restlichen Eigenwert bleibt uns nicht anderes übrig, als doch das charakteristische Polynom zu berechnen:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -2 & 2-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2-\lambda & -4 \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\big((2-\lambda)(8-\lambda)-16\big) + 2(\lambda-8+8) + 4(4-4+2\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 10\lambda + 2\lambda + 8\lambda = -\lambda^3 + 11\lambda^2 = -\lambda^2(\lambda-11)\,. \end{aligned}$$

Der dritte Eigenwert ist also elf, und jeder zugehörige Eigenvektor löst das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -10 & -1 & 2 \\ -2 & -9 & -4 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}\,.$$

Addiert man (-5)-mal die zweite Zeile zur ersten und zweimal die zweite zur dritten, erhält man die beiden äquivalenten Gleichungen

$$44y + 22z = 0 \quad \text{und} \quad -22y - 11z = 0\,,$$

die beide aussagen, daß $z = -2y$ ist. Setzt man dies ein in beispielsweise die zweite Gleichung, folgt, daß $-2x - y = 0$ oder $y = -2x$ ist. Die Lösungen sind daher allesamt Vielfache des Vektors

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

der somit den Eigenraum aufspannt.

l) Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die einzelnen Eigenwerte?

Lösung: Das charakteristische Polynom $-\lambda^2(\lambda-11)$ hat null als doppelte und elf als einfache Nullstelle, also hat der Eigenwert $\lambda = 0$ die algebraische Vielfachheit zwei, und $\lambda = 11$ hat algebraische Vielfachheit eins. Da wir zur Null zwei linear unabhängige Eigenvektoren gefunden haben, sind das auch die geometrischen Vielfachheiten.

m) Bestimmen Sie die allgemeinste Lösung $\big(x(t), y(t)\big)$ des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = -3x(t) - 2y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = 2x(t) + y(t)\,!$$

Lösung: Die Matrix $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ des Systems hat das charakteristische Polynom

$$(-3-\lambda)(1-\lambda) + 2\cdot 2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2\,,$$

-1 ist also Eigenwert der algebraischen Vielfachheit zwei.
Die Gleichung

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hat leider nur einen eindimensionalen Lösungsraum, der etwa vom Vektor $\binom{1}{-1}$ aufgespannt wird; die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts ist also nur eins.
Das Quadrat der linksstehenden Matrix ist die Nullmatrix (Das folgt schon daraus, daß der Hauptraum zu -1 der ganze $\mathbb{R}^2$ sein muß.), als zweiten Hauptvektor können wir also einen beliebigen Vektor vom Eigenvektor $\binom{1}{-1}$ linear unabhängigen Vektor nehmen, etwa $\binom{0}{1}$.

Mit $\binom{1}{-1}$ und $\binom{0}{1}$ als neuer Basis haben wir die neue Funktion $u(t) = x(t) + y(t)$ und weiterhin $y(t)$ selbst; mit diesen beiden Funktionen wird das Differentialgleichungssystem zu

$$\dot{u}(t) = -x(t) - y(t) = -u(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = 2x(t) + y(t) = 2u(t) - y(t)\,.$$

Jetzt gibt es mehrere Möglichkeiten: Natürlich ist klar, daß $u(t) = u_0 e^{-t}$ sein muß, und damit kann man die zweite Gleichung als inhomogene Gleichung betrachten (wo man allerdings etwas aufpassen muß), oder aber wir berechnen die Exponentialfunktion für die neue Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da die Diagonalmatrix dazu ein skalares Vielfaches der Einheitsmatrix ist, gibt es hiermit keinerlei Probleme:

$$e^{Bt} = e^{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} t} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 2te^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Die Lösungen der Differentialgleichung in neuen Koordinaten sind also

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 2te^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} u(t) &= u_0 e^{-t} \\ y(t) &= (2u_0 t + y_0) e^{-t} \end{aligned}.$$

Uns interessiert nicht $u(t)$, sondern

$$x(t) = u(t) - y(t) = (u_0 - 2u_0 t - y_0) e^{-t} = \big((x_0 - 2(x_0 + y_0)t\big) e^{-t}\,.$$

Auch bei $y(t)$ können wir noch u_0 durch x_0 ersetzen und erhalten

$$y(t) = (2u_0 t + y_0) e^{-t} = \big(2(x_0 + y_0)t + y_0\big) e^{-t}\,.$$

n) Bestimmen Sie Eigenwerte, Eigenvektoren und Hauptvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}!$$

Lösung: Das charakteristische Polynom berechnet sich, z.B. nach der SARRUSschen Regel, zu

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= (-2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 3 \cdot 2 - 2 + (2-\lambda) \cdot 2 + 3 \cdot (1-\lambda) + (2+\lambda) \cdot 2 \\ &= (\lambda^2 - 4)(1-\lambda) - 6 - 2 + 4 - 2\lambda + 3 - 3\lambda + 4 + 2\lambda \\ &= (-\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4) + (3 - 3\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1)\,. \end{aligned}$$

Nach dem Wurzelsatz von VIÈTE ist also das Produkt der drei Nullstellen gleich -1, und ihre Summe $+1$.

Einsetzen zeigt, daß die beiden ganzzahligen Teiler ± 1 des konstanten Koeffizienten Nullstellen sind; da ihr Produkt -1 und ihre Summe null ist, ist die dritte Nullstelle $+1$. Wir haben also die einfache Nullstelle -1 und die doppelte Nullstelle $+1$.

Für $\lambda = -1$ ist

$$A - \lambda E = A + E = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hier ist die erste Spalte gleich der dritten und die zweite linear unabhängig davon; der Lösungsraum ist somit eindimensional und wird aufgespannt von

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Für $\lambda = +1$ ist

$$A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} ;$$

jetzt stimmen die ersten beiden Spalten überein, während die dritte linear unabhängig davon ist. Daher ist auch hier der Eigenraum nur eindimensional; er wird aufgespannt von

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Da der Eigenwert $+1$ trotz algebraischer Vielfachheit zwei nur geometrische Vielfachheit eins hat, gibt es keine Basis aus Eigenvektoren, aber es gibt einen Hauptvektoren zweiter Stufe zum Eigenwert eins. Zu deren Bestimmung müssen wir

$$(A - E)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

berechnen; wir sehen sofort, daß diese Matrix alle Vektoren annuliert, deren erste beide Komponenten sich zu Null ergänzen. Hauptvektoren zweiter Stufe sind diejenigen unter diesen Vektoren, die keine Eigenvektoren sind, deren dritte Komponenten also nicht verschwindet. Die einfachste Wahl für einen zweiten Basisvektor des Hauptraums ist daher

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$