WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515 A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 15. Dezember 2005

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$!

b) Gibt es eine Basis von $\mathbb{C}^2$ aus *reellen* Eigenvektoren von C ?

c) Was ist e^C *bzw.* e^{Ct} ?

d) Berechnen Sie $e^{\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}}$!

e) Zeigen Sie: Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist ${}^tAA$ symmetrisch.

f) Mit welchen komplexen Zahlen a, b, c wird $\begin{pmatrix} 1 & 1+i & a \\ b & 2 & 3-i \\ 1-2i & c & 3 \end{pmatrix}$ eine HERMITEsche Matrix?

g) Welche der folgenden Matrizen A_n sind symmetrisch, welche HERMITEsch? Von welchen wissen Sie, daß $\mathbb{R}^4$ eine Basis aus Eigenvektoren von A_n hat?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \\ 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} i & 2i & 3i & 4i \\ 2i & 3i & 4i & 5i \\ 3i & 4i & 5i & 6i \\ 4i & 5i & 6i & 7i \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -i & i & 1 \\ i & -1 & 1 & -i \\ -i & 1 & 1 & -i \\ 1 & i & i & -1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} i & i & i & i \\ -i & i & -i & i \\ -i & i & i & i \\ -i & -i & -i & i \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

h) *Richtig oder falsch:* Hat der Hauptraum zum Eigenwert λ die Dimension r, so gibt es mindestens einen Hauptvektor der Stufe r.

i) *Richtig oder falsch:* Falls es zum Eigenwert λ einen Hauptvektor der Stufe r gibt, hat der Hauptraum mindestens die Dimension r.

j) *Richtig oder falsch:* Falls die Differenz zweier Hauptvektoren der Stufe r ungleich dem Nullvektor ist, ist sie selbst ein Hauptvektor der Stufe r.

k) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$!

l) Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die einzelnen Eigenwerte?

m) Bestimmen Sie die allgemeinste Lösung $\big(x(t), y(t)\big)$ des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = -3x(t) - 2y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = 2x(t) + y(t)\,!$$

n) Bestimmen Sie Eigenwerte, Eigenvektoren und Hauptvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\,!$$